На правах рукописи

Ле Динь Шон

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ ОПТИМИЗАЦИИ РИСКА В ЗАДАЧАХ ПЕРЕСТРАХОВАНИЯ

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ.

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Санкт-Петербург – 2007

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном электротехническом университете "ЛЭТИ" им. В.И. Ульянова (Ленина)

Научный руководитель –
доктор технических наук, профессор Григорьев Ю.Д.

Официальные оппоненты:
доктор технических наук, профессор Постников Е.В.
доктор технических наук, профессор Истомин Е.П.

Ведущая организация – Сибирский федеральный университет (г. Красноярск)

Защита состоится "____ "____________ 2007 года в   час. на заседании диссертационного Совета Д 212.238.01 Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В.И. Ульянова (Ленина) по адресу: 197376, Санкт-Петербург, ул. Проф. А. Попова, 5.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

Автореферат разослан "____ "____________ 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета   Пантелеев М.Г.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Принимать решения приходится во всех областях человеческой деятельности. В различных областях экономики и инженерной практики все чаще возникает потребность в принятии сложных решений, последствия которых бывают очень весомы. В связи с этим появляется потребность в разработке методов и алгоритмов принятия решений, которые упрощали бы этот процесс и придавали решениям большую надежность. Такая тенденция неизбежно требует формализации процесса принятия решений, что может оказать существенную помощь при решении практических задач.

В теории и практике страхования одной из наиболее сложных процедур принятия Business Intelligence решений (BI-решений) является *перестрахование*, т.е. операция между двумя страховыми компаниями, при которой одна их них передает, а другая принимает часть *риска* в обмен на выплату страховой премии. Поскольку в задачах перестрахования принимаемые решения неизбежно связаны с риском, то и постановка соответствующих задач должна заключаться в том, чтобы сводить этот риск к минимуму. Следовательно, общий подход к постановке задач перестрахования на основе теории риска и теории принятия решений должен включать некоторые новшества в процессе обработки информации, в частности, давать в руки бизнес-аналитику дополнительные критерии, руководящие им при выборе решения.

Начиная с 90-ых годов прошлого столетия, к исследованиям в области математического и информационного обеспечения задач страхования, проявляется все больший интерес со стороны производителей различных информационных технологий (IT-технологий). Разрабатываемые в настоящее время IT-компаниями соответствующие IT-технологии, включая Data Mining, активно используются страховщиками для решения разнообразных стратегических и текущих BI-задач.

Таким образом, актуальность исследования задач перестрахования, как одной из сфер автоматизации страхования, определяется, с одной стороны, необходимостью построения полного цикла использования аналитической информации для поддержки принятия BI-решений, а с другой стороны, необходимостью привнесения мирового опыта использования IT-технологий в страховании на российскую почву.

Целью диссертационной работы является разработка методов и алгоритмов оптимизации риска в задачах перестрахования и создание инструментальной среды анализа моделей рисков в виде соответствующей системы алгоритмов и программ.

Предметом исследования являются математические модели и методы оптимизации риска в задачах перестрахования.

Исследовательские задачи, решаемые в диссертационной работе для достижения поставленной цели:

1. *Постановка задачи* перестрахования как задачи принятия решений: классификация рисков и разработка на ее основе обобщенной функции дележа риска, позволяющей параметризовать процедуру принятия решений.

2. *Анализ* модели индивидуального риска в задачах перестрахования, в том числе: разработка методов, алгоритмов и программ оптимизации риска по различным критериям моментного и квантильного типов с учетом областей предпочтения, соответствующим отношению порядка стоп лосс, вероятности неразорения и прибыли.

3. *Анализ* модели коллективного риска в задачах перестрахования, в том числе: разработка методов, алгоритмов и программ оптимизации риска в динамической модели Крамера-Лундберга по различным критериям, включая характеристический коэффициент Лундберга, вероятность неразорения страховщика, VaR и $CVaR$.

4. *Аналитическое исследование* классического процесса риска (марковская модель коллективного риска Крамера-Лундберга).

Методы исследований. В диссертационной работе использовались теория принятия решений, теория риска, актуарная математика, теория вероятностей, методы оптимизации, численные методы решения интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода.

Научную новизну представляют следующие результаты:

1. Обобщенная модель дележа риска, позволяющая параметризовать процедуру принятия решений на множестве всех известных способов комонотонного и некомонотонного дележа риска.

2. Алгоритмы построения областей предпочтения в модели индивидуального риска, в том числе впервые с использованием отношения порядка стоп лосс, при квотном и эксцедентном способах дележа риска.

3. Алгоритмы оптимизации риска в модели Крамера-Лундберга при квотном, эксцедентном и других способах дележа риска, основанные на предложенной автором эксцедентной форме уравнения Крамера.

4. Аналитические результаты: а) нижняя граница $\delta = q - r \geq 0$ величины разности между шириной удержания q и уровнем удержания r для экспоненциального, Эрланга и Парето распределений при частично-эксцедентном дележе риска, гарантирующая страховщику преимущество перед перестраховщиком в смысле отношения стоп лосс; (б) модификации уравнения Крамера для вероятности неразорения в задачах перестрахования, (в) решение эксцедентного уравнения Крамера для марковской модели риска Крамера-Лундберга.

Научные положения, выносимые на защиту:

1. Алгоритмы оптимизации риска в краткосрочных моделях индивидуального риска.

2. Алгоритмы оптимизации риска в динамических моделях коллективного риска Крамера-Лундберга.

3. Аналитический результат: эксцедентное уравнение Крамера для обобщенной модели перестрахования в модели риска Крамера-Лундберга, решение уравнения Крамера в случае классической модели риска для эксцедентного и частично-эксцедентного перестрахования.

Практическая значимость результатов диссертационной работы заключается в разработке комплексного подхода к задаче перестрахования с точки зрения его алгоритмического и программного обеспечения. Конкретную практическую значимость имеет разработанная автором инструментальная среда анализа моделей риска в виде системы алгоритмов и программ анализа рисков САПАР, основанная на полученных автором теоретических и экспериментальных результатах.

Внедрение результатов работы. Разработанные методы, алгоритмы и программы актуарных расчетов использованы в Северо-Западном региональном филиале страховой акционерной компании "ЭНЕРГОГАРАНТ"(Санкт-Петербург), ООО Консультационный Центр "Универс Компакт"(Новосибирск) и в учебном процессе кафедры МО ЭВМ СПбГЭТУ.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

– XI Международной научно-технической конференции студентов и аспирантов "Радиотехника, электротехника и энергетика", посвященной 75-летию Московского энергетического института (Москва, 2005 г.),

– III-VI Всероссийских ФАМ-конференциях по финансово-актуарной математике и смежным вопросам (Красноярск, Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2004-2007 гг.),

– XV Международной научно-технической конференции "Математические методы и информационные технологии в экономике, социологии и образовании"(Пенза, Пензенская государственная техническая академия, 2005 г.),

– Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям SCM-2005 (Санкт-Петербург, СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2005 г.),

– V, VI Международных Научных Школах "Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах" МА БР (Санкт-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН, 2005, 2006 гг.),

– ежегодных научно-технических конференциях профессорско - преподавательского состава Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ", 2005-2007 гг.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 11 научных работ, из них – 4 статьи (2 статьи – из перечня изданий, рекомендованных ВАК) и 7 работ – в научных трудах международных и Всероссийских конференций.

Структура и обьём диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, списка литературы, включающего 128 наименований, и четырех приложений. Основная часть работы изложена на 131 страницах машинописного текста. Работа содержит 38 рисунков и 21 таблицу.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснованы актуальность и научная новизна, изложены цели, задачи и методы исследования, практическая значимость диссертационного исследования.

Первая глава (разделы 1.1, 1.2) носит обзорный характер и посвящена развернутому освещению современного состояния исследований в области теории риска и автоматизации страхования в России.

В *разделе 1.1* даются определения понятия риска и основных моделей анализа рисков. приводится краткий обзор развития актуарной науки в России. Отмечается вклад в развитие теории риска и математической теории страхования как ряда российских ученых (А.В. Бойков, Е.В. Булинская, О.Ю. Воробьев, А.Ю. Голубин, О.А. Змеев, В.В. Калашников, Ю.С. Кан, А.И. Кибзун, Г.М. Кошкин, Ан.А. Кудрявцев, В.К. Малиновский, Г.А. Медведев (Беларусь), А.А. Новоселов, Г.И. Фалин, С.Я. Шоргин и др.), так и зарубежных (K. Borch, C.D. Daykin, H. Gerber, C. Hipp, W. Hürlimann, T. Mack, H.H.

Pandjer, T. Penticäinen, H. Schmidli, E. Straub, M. Taksar, M. Vogt, S.S. Wang, G.E. Willmot etc.). Перечисляются основные научные школы и центры актуарных исследований и образования в России.

В *разделе 1.2* приводится краткая информация о проблемах развития IT - технологий автоматизации страхования в России. Приводятся данные опросов о качестве и потенциальном спросе на BI-решения, о факторах, препятствующих и способствующих автоматизации страхования. Дается краткая характеристика разработанной в диссертации системы алгоритмов и программ анализа рисков (САПАР) (рис. 1.1) как подсистемы более общих систем поддержки принятия решений (СППР).

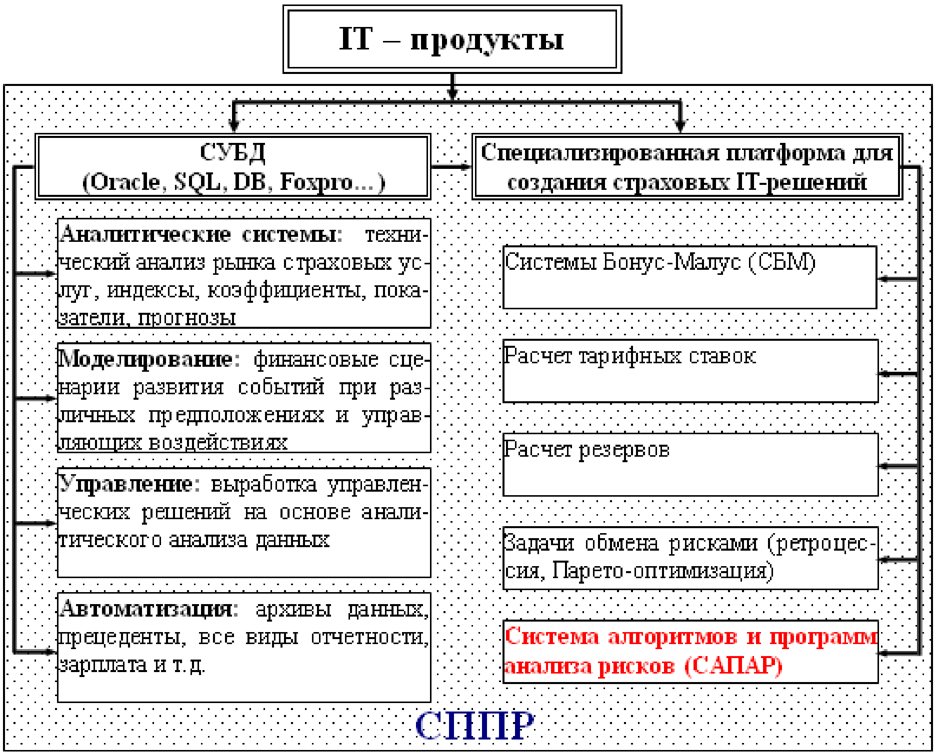


Рис. 1.1. Программные продукты IT-компаний в страховании.

Вторая глава (разделы 2.1-2.3) посвящена классификациям моделей перестрахования по способам дележа риска и мер риска по их свойствам.

В *разделе 2.1* задача перестрахования формулируется как задача принятия решений: определяются понятия цели, решения и критерия качества решения. В качестве *решения* рассматривается векторный параметр d, который определяет расщепление риска X на две составляющие $Y = g(X;d)$ и $Z = X - g(X;d)$, первая из которых удерживается страховщиком, вторая – перестраховщиком. Выбор наилучшего решения d^* означает выбор наилучшего распределения F_Y в классе возможных распределений $\mathcal{F}= \{F_d, d \in \mathcal{D}\}$. Если на $\mathcal{F}$ задан монотонный функционал μ, то задача выбора наилучшего распределения сводится к задаче оптимизации

$$\mu(F_Y) \to \max_{d\in\mathcal{D}}(\min_{d\in\mathcal{D}}). \qquad (1)$$

Схема перестрахования, как задача принятия решений, представлена на рис. 1.2.

В *разделе 2.2* приводится классификация моделей перестрахования по двум признакам: по способу дележа риска, или виду перестрахования, и по свойствам функции дележа страхового риска X (табл. 2.1). Пропорциональный и непропорциональный виды перестрахования определяются функциями дележа риска g и h такими, что

$$Y = g(X), \quad Z = h(X), \tag{2}$$

где $X = Y + Z$. В зависимости от вида функций g и h риски Y и Z обладают разными свойствами. Важнейшим из них является свойство комонотонности.

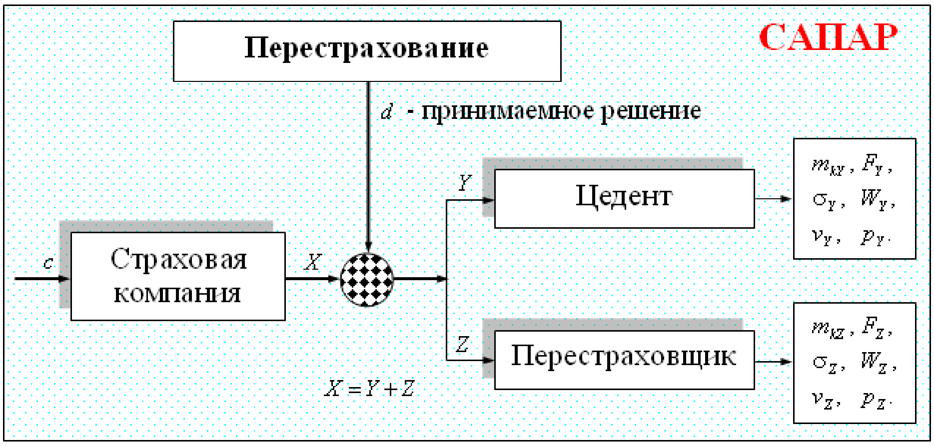


Рис. 1.2. Перестрахование как задача принятия решений.

Риски Y и Z называются *комонотонными*, если g и h – неубывающие функции. При квотном перестраховании риски Y и Z задаются функциями $g(x) = ax$ и $h(x) = (1-a)x$, $a \in (0, 1)$, при эксцедентном перестраховании – *лейерами*, т.е. преобразованиями случайных величин вида

$$X_{a,a+b} = \min\{\max(0, X - a), b\}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Практика реального страхования показывает, что наряду с комонотонным разделением рисков, иногда бывает необходимым прибегнуть к некомонотонному их разбиению. Примером такого разбиения является условная франшиза, при которой функции дележа $g(x)$ и $h(x)$ разрывны, не являются монотонными и имеют вид $g(x) = xI(r - x)$, $h(x) = xI(x - r)$, где $I(r - x)$ – индикатор события $\{x \leq r\}$.

Таблица 2.1. Классификация моделей перестрахования.

	Комонотонные риски	Некомонотонные риски
Пропорциональное	квотное	—
Непропорциональное	эксцедентное, частично-эксцедентное	условная франшиза, смешанная франшиза, эксцедентно-квотное

С алгоритмической точки зрения удобно объединить комонотонный и некомонотонный способы дележа рисков в единое целое. В работе предложена *обобщенная модель*, или функция дележа риска

$$\begin{aligned} g(x; d) \;&=\; s + (1 - a)x \\ &-\; \{(r - x)I(r - x) + (s - r + (1 - a)x)I(r + q - x)\}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $d = (r, q, a, s)$ – принимаемое решение о дележе риска. При $s = r$ получаем комонотонные схемы дележа риска, при $s \neq r$ $(0 < s < r + q)$ – некомонотонные. Задавая конкретные значения векторного параметра d получаем *шесть* различных дележей риска, исследованных в диссертационной работе. Для всех дележей риска X с функцией распределения F найдены функции распределения F_Y, F_Z рисков Y и Z и их моменты $m_{kY} = \mathbb{M}Y^k$, $m_{kZ} = \mathbb{M}Z^k$, используемые в САПАР.

В *разделе 2.3* дается краткий обзор отношений порядка на множестве распределений риска $\mathcal{F}$, которые задаются с помощью мер риска. Основное внимание уделено отношению порядка стоп лосс $\leq_{sl}$, согласно которому $Y \leq_{sl} Z$ (риск Y не превосходит риск Z в смысле $\leq_{sl}$), если

$$\forall x \in [0, \infty) : \pi_Y(x) \leq \pi_Z(x), \tag{4}$$

где $\pi(x) = \int_x^\infty [1 - F(t)]dt$. Области

$$A_Y = \{x \geq 0 : \pi_Y(x) \leq \pi_Z(x)\}, \quad A_Z = \{x \geq 0 : \pi_Z(x) \leq \pi_Y(x)\}. \tag{5}$$

назовем областями $\leq_{sl}$-, или A-предпочтений.

Для ответа на вопрос, связаны ли риски Y и Z отношением порядка $Y \leq_{sl} Z$, в САПАР используется известное *KNST-условие.* В качестве следствия из него для случая эксцедентного перестрахования ($Y = X_{0,r}$, $Z = X_{r,\infty}$) в работе получена следующая характеризация областей A-предпочтения (5).

Предложение 1. *Пусть выполнены следующие условия*:
(1) $X \sim F$, *supp* $F = [0, b]$, $Y = X_{0,r}$, $Z = X_{r,\infty}$;
(2) r_1 – *корень уравнения* $m_{1Y} = m_{1Z}$.
Тогда:
(1) $A_Y = [0, r_1]$, $A_Z = [\frac{b}{2}, b]$;
(2) $A_r = (r_1, \frac{b}{2})$ – *область неопределенности отношения* $\leq_{sl}$.

Из предложения 1 следует, что отношение $\leq_{sl}$ не является полным. Для частично-эксцедентного перестрахования ($Y = X_{0,r} + X_{r+q,\infty}$, $Z = X_{r,r+q}$) в работе также получена характеризация отношения $\leq_{sl}$, являющаяся следствием $KNST$-условия.

Предложение 2. *Пусть выполнены следующие условия:*
(1) $X \sim F$, *supp* $F = [0, \infty)$, $Y = X_{0,r} + X_{r+q,\infty}$, $Z = X_{r,r+q}$;
(2) $\delta = q - r \geq 0$, $u(\delta) = \pi(2r + \delta) - \frac{1}{2}\pi(2r)$.
Тогда:
(1) *если* $u(\delta) \geq 0$, *то* $Z \leq_{sl} Y$;
(2) *функция* $u(\delta)$ *вогнута по* $\delta \in [0, \infty)$ *и имеет на* $[0, \infty)$ *единственный нуль* δ^*.

Для двух распределений риска, экспоненциального $Exp(1)$ и Парето $Pa(\alpha, 1)$, величины δ^* найдены в явном виде:

(1) $X \sim Exp(1) \quad : \quad F(x) = 1 - e^{-x} \quad \Rightarrow \quad \delta^* = \log 2.$

(2) $X \sim Pa(\alpha, 1) \quad : \quad F(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^\alpha} \quad \Rightarrow \quad \delta^* = (\sqrt[\alpha-1]{2} - 1)(1 + 2r).$

Для распределения Эрланга, $X \sim Er(1) : F(x) = 1 - (1 + x)e^{-x}$, показано, что δ^* – корень уравнения $\delta = \log\left(2 + \frac{\delta}{1+r}\right)$, или

$$\delta^* = -W(-1, -(1 + r)e^{-2(1+r)}) - 2(1 + r),$$

где $W(-1, x)$ – ветвь W-функции Ламберта $y = W(x)$, являющейся, по определению, обратной к функции $x = ze^z$ для комплексных z. Для $x \in (-e^{-1}, 0)$ функция Ламберта принимает вещественные значения.

В *разделе 2.4* рассмотрены классы и свойства мер риска, представленных в САПАР. Выделены классы мер моментного и квантильного типа. К третьему классу отнесены меры риска, используемые в модели коллективного риска: коэффициент Лундберга, вероятность неразорения и др. Кратко отмечены когерентные меры риска. К первому классу относятся среднее $m_1 = \mathbb{M}X$, дисперсия $\sigma^2 = \mathbb{D}X$, коэффициент вариации $v = \sigma/m_1$ и различные комбинации моментов m_{kY} и m_{kZ}, ко второму – меры риска $VaR_\alpha(X) = F^{-1}(\alpha)$ и

$$CVaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + \frac{1}{1-\alpha}\int_{VaR_\alpha(X)}^{\infty}(1 - F(x))dx. \tag{6}$$

Класс когерентных мер предложен в литературе недавно. Он определяется аксиоматически и представляет большой теоретический интерес. К нему, в частности, относятся m_1 и $CVaR_\alpha(X)$. Отмечаются свойства монотонности квантильных мер риска относительно отношения порядка стоп лосс $\leq_{sl}$. Эти свойства в дальнейшем используются при построении алгоритмов САПАР.

Третья глава (разделы 3.1-3.3) посвящена анализу алгоритмов перестрахования (I-алгоритмов) в модели индивидуального риска.

В *разделе 3.1* определяются модель индивидуального риска, ее исходные предположения, приводится практический алгоритм актуарных расчетов, в том числе вероятностей неразорения $W_d = (W_Y, W_Z)$, в задаче эксцедентного перестрахования.

Пусть N – количество однотипных договоров страхования с одинаковым сроком действия t_0 и возможными выплатами X_i по i-му договору, $c = (1+\theta)N\mathbb{M}X_1$. Тогда в рамках модели индивидуального риска страхуемый риск X и вероятность неразорения W компании определяются выражениями

$$X = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ X_1 + X_2 + \ldots + X_N, & t = t_0, \end{cases} \qquad W = \begin{cases} 1, & t < t_0, \\ \mathbb{P}\{c - X \geq 0\}, & t = t_0. \end{cases}$$

Обозначим $\eta = (\theta, \xi)$, $p_d = (p_Y, p_Z)$. Основная идея всех I-алгоритмов – построение отображения $G : (\eta, d) \mapsto (W_d, p_d)$ и принятие оптимального решения d^* на основе анализа областей $\leq_{sl}$-предпочтения A_Y, A_Z и областей W- и P-предпочтений

$$\begin{aligned} B_Y &= \Big\{(\eta, d) : W_Y \geq W_Z\Big\}, & B_Z &= \Big\{(\eta, d) : W_Z \geq W_Y\Big\}, \\ P_Y &= \Big\{(\eta, d) : p_Y \leq p_Z\Big\}, & P_Z &= \Big\{(\eta, d) : p_Z \leq p_Y\Big\}. \end{aligned}$$

Пусть $X \sim F$, т.е. $F(x) = \mathbb{P}\{X < x\}$, $m_1 = \mathbb{M}X$, $m_Y = m_{1Y}$ и $m_Z = m_{1Z}$. По определению, $c_Y = (1+\theta)m_1 - (1+\xi)m_Z$, $c_Z = (1+\xi)m_Z$ – ожидаемые доходы страховщика и перестраховщика. Поэтому координатные функции отображения G имеют вид:

$$W_d = (F_Y(c_Y), F_Z(c_Z)), \quad p_d = (c_Y - m_Y, c_Z - m_Z). \tag{7}$$

Функции распределения F_Y, F_Z и средние m_Y и m_Z однозначно определяются решением d. Области W- и P-предпочтений визуализируются с помощью графического интерфейса I-алгоритмов в $(\alpha, \theta/\xi)$- или (r, ξ)-плоскостях (для квотного и эксцедентного перестрахования соответственно).

При анализе рисков Y и Z в последующих I-алгоритмах используются оптимальные решения $d^* = \arg\min_{d \in \mathcal{D}} \varphi_i(d)$, $i = 1, ..., 4$, где

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= (m_Y - m_Z)^2 && \text{– \textit{квадрат разности средних,}}\\
\varphi_2 &= \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2 && \text{– \textit{сумма дисперсий,}}\\
\varphi_3 &= m_{(Y-Z)^2} = \mathbb{M}(Y - Z)^2 && \text{– \textit{средний квадрат отклонения,}}\\
\varphi_4 &= \varphi_1 + \varphi_2. &&
\end{aligned}$$

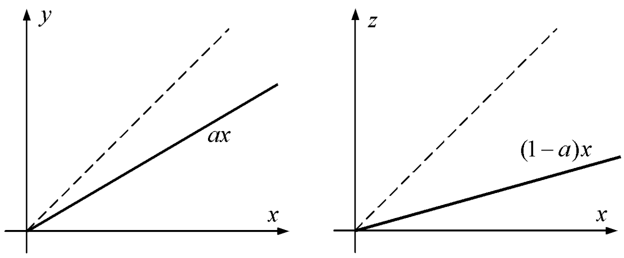
Алгоритм 3.1. В данном алгоритме задача выбора оптимального решения d не ставится. Это обычный алгоритм практических расчетов при заданном d. В данном случае полагаем

$$W_Y = \mathbb{P}\{Y < c_Y\} \cong \Phi\Big(\frac{c_Y - m_Y}{\sigma_Y}\Big), \quad W_Z = \mathbb{P}\{Z < c_Z\} \cong \Phi\Big(\frac{c_Z - m_Z}{\sigma_Z}\Big).$$

Дальнейший порядок расчетов и анализ влияния выбираемого решения d при нормальной аппроксимации иллюстрируются в работе на числовом примере в случае эксцедентного перестрахования.

В *разделе 3.2* рассматриваются I-алгоритмы перестрахования для квотного, эксцедентного и частично-эксцедентного перестрахования. Всего представлено 6 алгоритмов.

Алгоритм 3.2. Квотное перестрахование. Пусть $X = Y + Z$, где $Y = aX$, $Z = (1 - a)X$, $0 < a \le 1$ (рис. 3.1). Тогда $c_Y = \{(1 + \xi)a - (\xi - \theta)\}m_1$, $c_Z = (1 + \xi)(1 - a)m_1$, $p_Y = \{a\xi - (\xi - \theta)\}m_1$, $p_Z = (1 - a)\xi m_1$.



(а) страховщик (б) перестраховщик

Рис. 3.1. Квотное перестрахование.

Свойства:
$Y = aX$, $Z = (1 - a)X$,
$F_Y(x) = F\Big(\frac{x}{a}\Big)$,
$F_Z(x) = F\Big(\frac{x}{1-a}\Big)$,
$v_Y = v_Z = v$.

Исходя из выражений для F_Y, F_Z, условия неотрицательность прибыли $p_Y \ge 0$ и отношения порядка $\le_{sl}$ определяем области предпочтения обеих сторон (рис. 3.2).

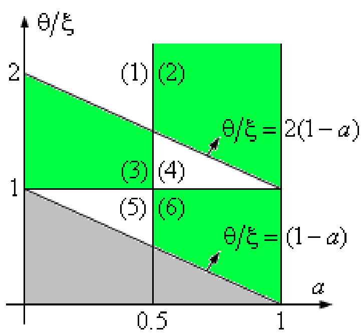
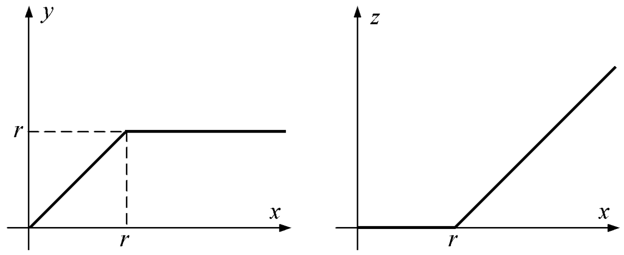


Рис. 3.2. Области предпочтений.

(1) $Y \le_{sl} Z$, $W_Y \ge W_Z$, $p_Y \ge p_Z$;
(2) $Z \le_{sl} Y$, $W_Y \ge W_Z$, $p_Y \ge p_Z$;
(3) $Y \le_{sl} Z$, $W_Y \ge W_Z$, $p_Z \ge p_Y$;
(4) $Z \le_{sl} Y$, $W_Y \ge W_Z$, $p_Z \ge p_Y$;
(5) $Y \le_{sl} Z$, $W_Z \ge W_Y$, $p_Z \ge p_Y$;
(6) $Z \le_{sl} Y$, $W_Z \ge W_Y$, $p_Z \ge p_Y$.

Эксцедентное перестрахование. В отличие от квотного перестрахования, при данном способе дележа риска (рис. 3.3) вероятности неразорения и прибыли обеих сторон меняются в зависимости от r и нагрузок $\eta = (\theta, \xi)$ более сложным образом.



(а) страховщик (б) перестраховщик

Рис. 3.3. Эксцедентное перестрахование.

Свойства:

$Y = X_{0,r}, \quad Z = X_{r,\infty},$

$$F_Y(x) = \begin{cases} F(x), & x \le r, \\ 1, & x > r. \end{cases},$$

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ F(x+r), & x > 0. \end{cases},$$

Основная идея представленных в работе алгоритмов 3.3-3.5 состоит в построении областей A-, W- и P-предпочтений и некоторых простых рекомендаций по их использованию при выборе решения r и нагрузок безопасности $\eta = (\theta, \xi)$. Существующие в теории принятия решений более сложные алгоритмы выбора на основе областей предпочтения (оптимальность по Парето, оптимальность относительно обобщенных критериев и т.д.) в работе не рассматриваются.

Алгоритм 3.3. Обозначим $a_r = m_Y$, $b_r = m_Z$ и пусть $supp\ F = [0, b]$. Если $b < \infty$, то борьба интересов за выбор r в смысле $\le_{sl}$-предпочтений обычно разворачивается в промежутке $[r_1, \frac{b}{2}]$. Наилучшим $\le_{sl}$-предпочтением для страховщика в этой ситуации является стратегия $r_Y = r_1$, а для перестраховщика – стратегия $r_Z = \frac{b}{2}$. Однако, в общем случае, алгоритм выбора d должен учитывать также W- и P-предпочтения.

В данном случае имеем $c_Y = (1+\theta)m_1 - (1+\xi)b_r$, $c_Z = (1+\xi)b_r$, $p_Y = \theta m_1 - \xi b_r$, $p_Z = \xi b_r$. Геометрию областей W- и P-предпочтений описывает теорема

Теорема 1. *Пусть* $m_1 = \mathbb{M}X < \infty$, $supp\ F = [0, b]$, r *– заданный уровень удержания. Имеют место утверждения:*

$$\begin{aligned}
(1) \quad B_Y &= \Big\{(\theta,\xi) \in R^2 : \theta > \tfrac{r-a_r}{a_r}, \quad \theta < \xi \le \Big(1 + \tfrac{a_r}{b_r}\Big)\theta - \tfrac{r-a_r}{b_r}\Big\}; \\
B_Z &= \Big\{(\theta,\xi) \in R^2 : \theta > 0, \quad \max\Big\{\theta, \Big(1 + \tfrac{a_r}{b_r}\Big)\theta - \tfrac{r-a_r}{b_r}\Big\} \le \xi \le \Big(1 + \tfrac{a_r}{b_r}\Big)\theta\Big\}; \\
(2) \quad P_Y &= \Big\{(\theta,\xi) \in R^2 : \xi \ge \theta m_1/2b_r\Big\}, \quad P_Z = \Big\{(\theta,\xi) \in R^2 : \xi < \theta m_1/2b_r\Big\}.
\end{aligned}$$

Фиксируя θ, с помощью полученных характеризаций областей W- и P- предпочтений строим области A_Y, A_Z, B_Y, B_Z и P_Y, P_Z в (r, ξ)-плоскости. Окончательное решение о выборе нагрузок $\eta = (\theta, \xi)$, а, значит, и стратегии перестрахования принимается после анализа этих областей на основе перебора значений r_k или каким-либо другим, в том числе неформальным, способом. Идея алгоритма показана на следующем примере.

Пример 1. Пусть $X \sim Rav(0,1)$. Тогда $a_r = \frac{r(2-r)}{2}$, $b_r = \frac{(1-r)^2}{2}$, $r_1 = \arg\min \varphi_1(r) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.2929$, $\frac{b}{2} = 0.5$. Следовательно, $A_Y = (0, 0.2929)$, $A_Z = (0.5, 1)$, $A_r = (0.2929, 0.5)$ – область $\le_{sl}$-безразличия. Зафиксируем $\theta = 0.5$. Области $\le_{sl}$-, W- и P-предпочтений показаны на рис. 3.4. $\square$

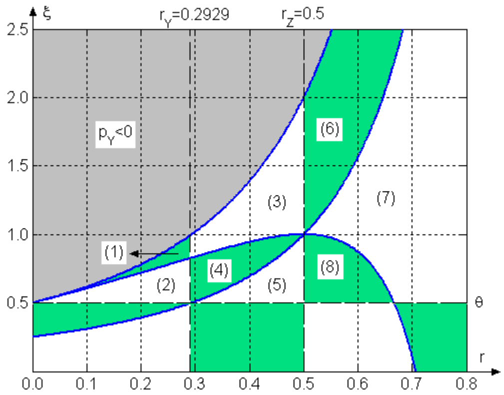


Рис. 3.4. Области предпочтений.

$$\begin{array}{llll}
(1) & Y \le_{sl} Z, & W_Y \le W_Z, & p_Y \le p_Z, \\
(2) & Y \le_{sl} Z, & W_Z \le W_Y, & p_Y \le p_Z, \\
(3) & Y \ne Z, & W_Y \le W_Z, & p_Y \le p_Z, \\
(4) & Y \ne Z, & W_Z \le W_Y, & p_Y \le p_Z, \\
(5) & Y \ne Z, & W_Z \le W_Y, & p_Z \le p_Y, \\
(6) & Z \le_{sl} Y, & W_Y \le W_Z, & p_Y \le p_Z, \\
(7) & Z \le_{sl} Y, & W_Y \le W_Z, & p_Z \le p_Y, \\
(8) & Z \le_{sl} Y, & W_Z \le W_Y, & p_Z \le p_Y.
\end{array}$$

Алгоритм 3.4 заключается в построении областей W и P-предпочтений на основе уравнения баланса $CVaR_\alpha(X) = (1+\theta)m_1$. Данный вариант принятия решения опирается на следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) $m_1 = \mathbb{M}X < \infty$, *supp* $F = [0, b]$;

(2) $c = (1+\theta_0)m_1$, $c_r = c - (1+\xi_0)b_r$ – *уравнение границы между* B_Y *и* B_Z;

(3) α_0 – *корень уравнения* $CVaR_\alpha = c$;

(4) $\xi^* = \alpha_0/(1-\alpha_0)$.

Тогда уравнение $c_r = r$ *имеет* :

(1) *два решения* $r^* > 0$ *и* $r^{**} > 0$, *если* $\xi_0 < \xi^*$;

(2) *единственное решение* $r_0 = VaR_{\alpha_0}(X)$, *если* $\xi_0 = \xi^*$;

(3) *нуль решений, если* $\xi_0 > \xi^*$.

Пример 2. Пусть $X \sim Exp(1)$. Тогда $m_1 = 1$ и $VaR_\alpha(X) = -\log(1-\alpha)$. Согласно (6) уравнение $CVaR_\alpha = c$ принимает вид $-\log(1-\alpha) + 1 = 1 + \theta$, откуда находим $\alpha = 1 - e^{-\theta}$, $\xi^* = e^{\theta} - 1$. Зафиксируем θ_0. В (r, ξ)-плоскости строим W- и P-области предпочтения (рис. 3.5). Согласно теореме 2 точка $(r^*, \xi^*) = (\theta_0, e^{\theta_0} - 1)$ – вершина кривой $\xi = \xi(r)$. Если $\xi_0 < \xi^*$, то $\forall r_0 \in (r^*, r^{**}) \Rightarrow (r_0, \xi_0) \in B_Y$. Поскольку $r_1 = \log 2 = 0.6931$, то $\forall r_0 \le 0.6931$: $Y \le_{sl} Z$. $\square$

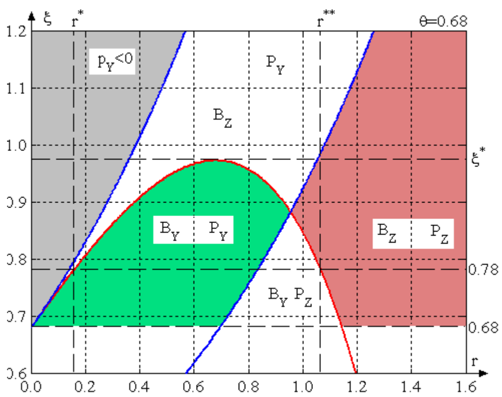


Рис. 3.5. Области предпочтений.

Числовые данные к примеру 2:

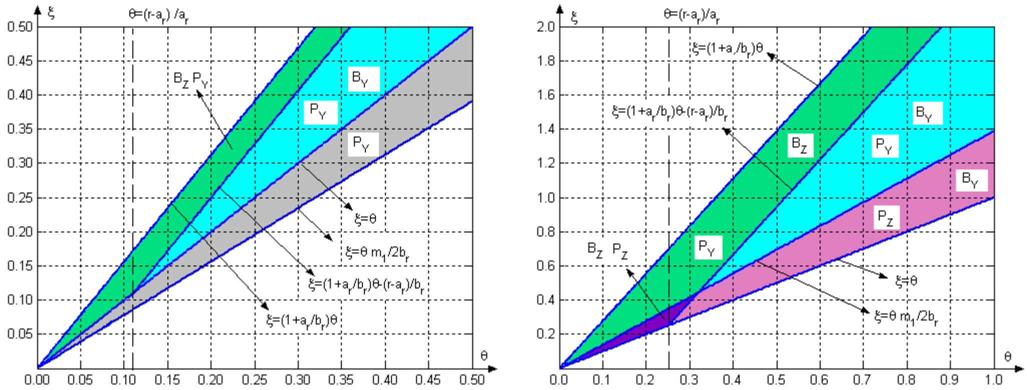
$\theta_0 = 0.68$, $\xi^* = e^{0.68} - 1 = 0.9739$.

(а) $0.78 = \xi_0 < \xi^*$,
$r^* = 0.1539$, $r^{**} = 1.0686$,
$r_0 \in (r^*, r^{**}) \Rightarrow (r_0, \xi_0) \in B_Y$,
если $r_0 < r^*$ или $r_0 > r^{**}$, то
$(r_0, \xi_0) \in B_Z$;

(б) если $\xi_0 \ge \xi^* = 0.9739$, то
$\forall r_0$: $(r_0, \xi_0) \in B_Z$.

Алгоритм 3.5 является вариантом алгоритма 3.3 и иллюстрирует процедуру выбора r на основе областей W- и P-предпочтений на основе теоремы 1, но в пространстве нагрузок безопасности $\eta = (\theta, \xi)$.

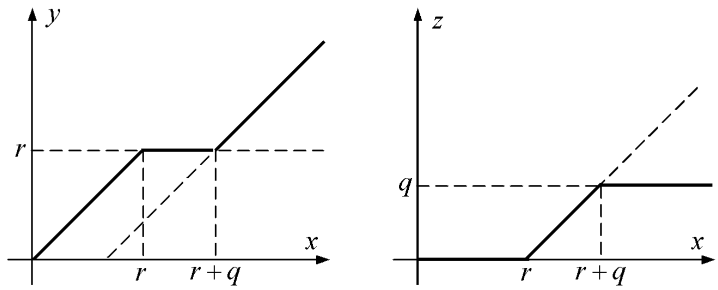
Пример 3. $X \sim Rav(0,1)$, $r_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{b}{2} = 0.5$. Решение о выборе r принимается на основе анализа областей W- и P-предпочтений, представленных на рис. 3.6. □



(а) $r = 0.2 < r_1$ (б) $r = 0.4 \in [r_1, \frac{b}{2}]$

Рис. 3.6. Пример 3. W- и P-области.

Частично-эксцедентное перестрахование. Алгоритм анализа рисков для данной схемы дележа риска (рис. 3.7) более сложен, чем в предыдущем случае. Поэтому в САПАР представлены более простые алгоритмы 3.6 и 3.7.



Частично-эксцедентное перестрахование:

$Y = X_{0,r} + X_{r+q,\infty}$, $Z = X_{r,r+q}$.

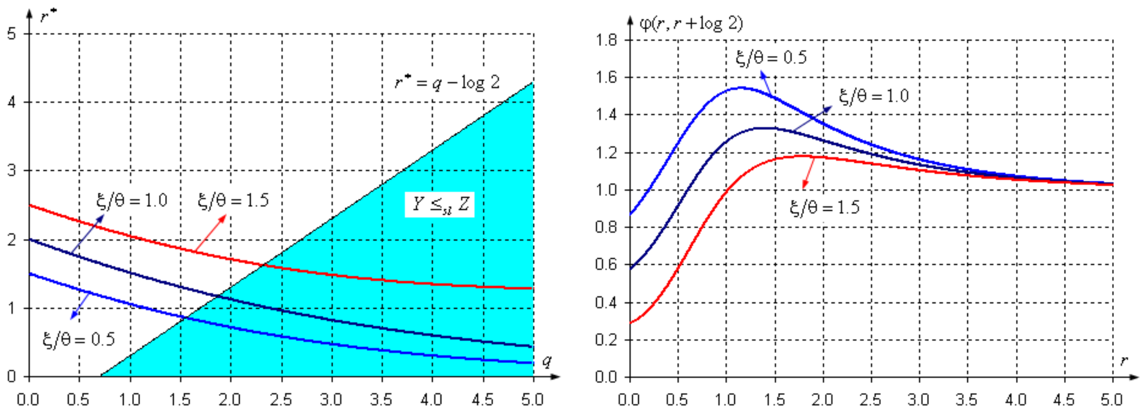
Параметры: r – уровень удержания; q – ширина зоны удержания перестраховщика.

(а) страховщик (б) перестраховщик

Рис. 3.7. Частично-эксцедентное перестрахование.

Алгоритм 3.6 заключается в оптимизации по r функционалов $\varphi_i(r,q)$ при $q = r+\delta^*$, где функция $\delta^* = \delta(r)$ определяется, аналитически или численно, заранее.

Пример 4. $X \sim Exp(1)$, $\varphi_Y(r,q) = (c_Y - m_Y)/\sigma_Y \to \max_{r\geq 0}$. Пусть $\xi/\theta = 0.5, 1.0, 1.5$. Графическая интерпретация определения оптимального значения r^* показана на рис. 3.8а, график $\varphi_Y(r, r+\log 2)$ – на рис. 3.8б. □



(а) Граница $\leq_{sl}$-предпочтений (б) $\varphi_Y(r,q) = \varphi_Y(r, r+\log 2)$.

Рис. 3.8. Максимизация функционала $\varphi_Y(r,q) = (c_Y - m_Y)/\sigma_Y$.

Алгоритм 3.7 заключается в минимизации функционала $\varphi_2(r,q) = \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2$. В данном случае значения r и q находятся с помощью решения нелинейной системы двух уравнений, которая приводится в диссертации.

В *разделе 3.3* приведены примеры эксцедентных стратегий управления рисками в теории технического обслуживания сложных систем и управления запасами.

В четвертой главе (разделы 4.1-4.4) рассматриваются C-алгоритмы оптимизации риска в эксцедентной модели коллективного риска Крамера-Лундберга по критериям:

$\rho_1(M) \quad = R(M) \to \max$ – *коэффициент Лундберга*;
$\rho_2(r) \quad = W_x(r) \to \max$ – *вероятность неразорения при заданном* x;
$\rho_3(r) \quad = VaR_{1-\varepsilon}(r) \to \min$ – *начальный капитал при* $W_r(x) \geq 1-\varepsilon$;
$\rho_4(r) \quad = CVaR_{1-\varepsilon} \to \min$ – *условный* VaR *при* $W_r(x) \geq 1-\varepsilon$.

В разделе 4.1 определяется модель коллективного риска Крамера-Лундберга, описывающая финансовое состояние страховщика в момент t:

$$V(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \tag{8}$$

где $x = V(0)$ – начальный капитал, $c = (1+\theta)\lambda m_1$ – скорость поступления премий в единицу времени, $m_1 = \mathbb{M}X_1$, $N(t)$ – пуассоновский процесс числа требований оплаты на $[0,t)$, λ – пуассоновский параметр, $\{X_i \geq 0\}$ – последовательность н.о.р. с.в. (размеры требований оплаты), независимая от $N(t)$. Основными инструментами исследования случайного процесса (8) являются:

– *неравенство Лундберга* $\Psi(x) \leq e^{-Rx}$, где $\Psi(x)$ – вероятность разорения;

– *коэффициент Лундберга* $R > 0$ (единственный положительный корень характеристического уравнения $\phi(r) = 0$, где $\phi(r) = \lambda\{\mathbb{M}e^{rX} - 1\} - cr$);

– *интегральное уравнение Крамера* для вероятности неразорения

$$W(x) = \frac{\lambda}{c}\int_0^x K(x-s)W(s)ds + W(0), \tag{9}$$

где $W(x) = 1 - \Phi(x)$, $K(t) = 1 - F(t)$ и $W(0) = 1 - \lambda m_1/c > 0$.

В разделе 4.2 исследуется коэффициент Лундберга R при квотном и эксцедентном дележе рисков X_i. Для этого в $\phi(r)$ заменяем X на Y и c на c_Y. Коэффициент R оказывается при этом унимодальной функцией квоты a и уровня удержания M соответственно. *В алгоритме 4.1* реализован метод Хальда-Шмидли (2004) вычисления $a_0 = \arg\max R(a)$. В *алгоритме 4.2* этот метод конкретизируется для экспоненциального распределения потерь $X \sim Exp(\mu)$. *Алгоритм 4.3* реализует метод Центено (1997) вычисления $M_0 = \arg\max R(M)$:

(1) $R_0 :=$ корень уравнения
$\int_0^{\frac{1}{r}\log(1+\xi)} e^{xr}(1-F(x))dx = (1+\xi)\int_0^{\frac{1}{r}\log(1+\xi)}(1-F(x))dx - (\xi-\theta)m_1;$

(2) $M_0 := \frac{1}{R_0}\log(1+\xi)$.

В разделе 4.3 получен основной аналитический результат для задачи эксцедентного перестрахования – теорема 4.2, в которой вводится эксцедентное уравнение Крамера и отмечается его связь с уравнением *Гамильтона-Якоби-Беллмана*

$$\sup_{r\in[\delta,\infty)}\Big\{c_r W'(x)+\lambda\Big(\int_0^x W(x-y\wedge r)dF(y)-W(x)\Big)\Big\}=0. \tag{10}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) $v_r^{-1}=(1+\theta)m_1-(1+\xi)b_r$, $W_r(0)=1-v_r a_r$;

(2) δ – *корень уравнения* $\frac{a_r}{b_r}=\xi/\theta-1$.

Тогда имеют место следующие утверждения:

(1) *вероятность неразорения* $W_r(x)$ *при* $r\geq\delta$ *удовлетворяет уравнению*

$$W_r(x)=v_r\int_{0\vee(x-r)}^x(1-F(x-s))W_r(s)ds+W_r(0); \tag{11}$$

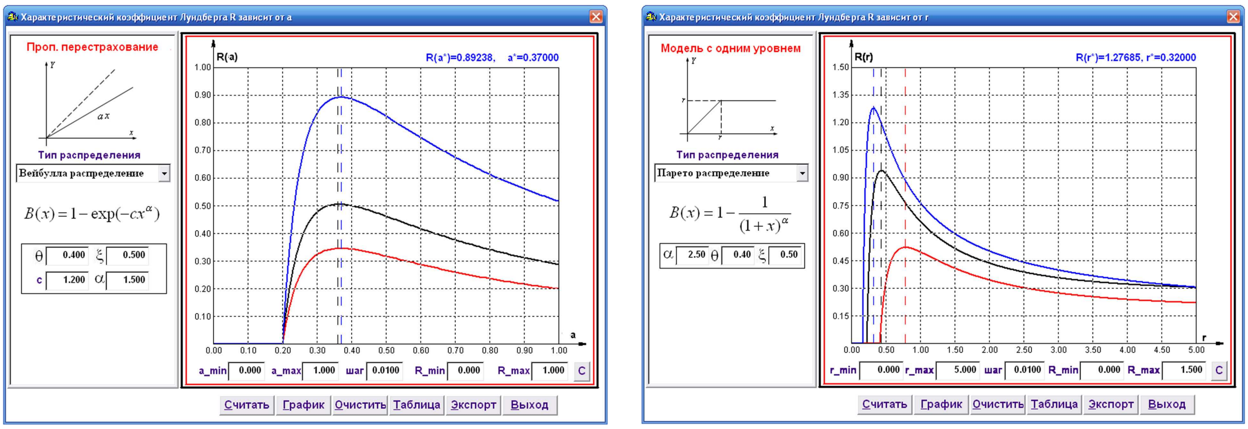
(2) *уравнение* (11) *эквивалентно уравнению*

$$c_r W_r'(x)=-\lambda\Big\{\int_0^x W_r(x-y\wedge r)dF(y)-W_r(x)\Big\}; \tag{12}$$

(3) *функция* $W(x):=\sup_{r\in[\delta,\infty)}W_r(x)$ *является решением уравнения* (10).

Найдено аналитическое решение уравнения (11) в случае $X_i\sim Exp(1)$ (теорема 4.3) и разработан *алгоритм 4.4* его численного решения для произвольных распределений риска.

Пример 5. (а) *алгоритм* 4.1: $X\sim Wei(\alpha,c)$, $\alpha=1.5$, $c=1.2$, $\eta=(0.4,0.5)$; (б) *алгоритм* 4.3: $X\sim Pa(\alpha,1)$, $\alpha=2.5$, $\eta=(0.4,0.5)$. $\square$



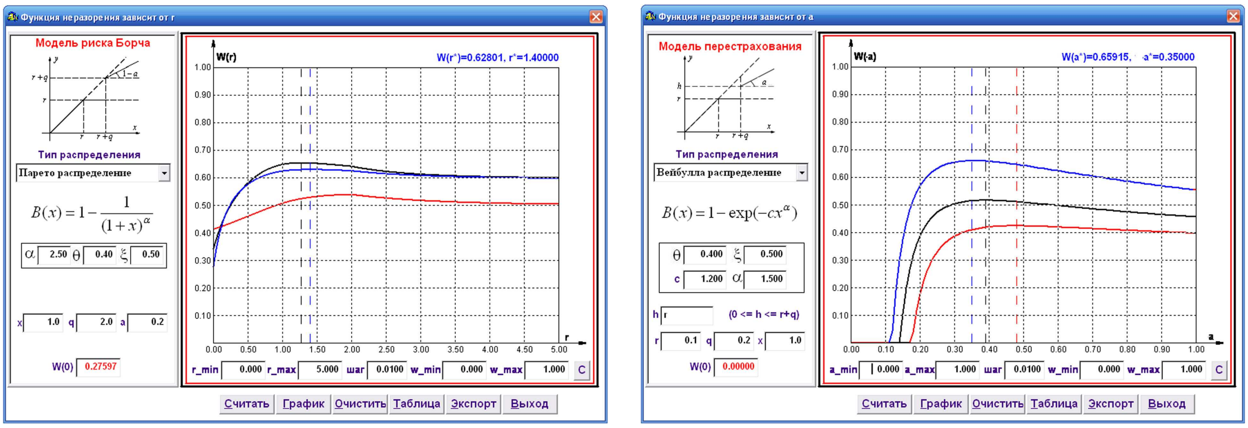
(а) Алгоритм 4.1. (б) Алгоритм 4.3.

Рис. 4.1. Экранные формы алгоритмов максимизации R.

Алгоритм 4.5 предназначен для реализации численного метода решения уравнения (10). С помощью *алгоритма 4.6* вычисляется минимальное значение начального капитала $x=VaR_\alpha(X)$ при заданном уровне вероятности неразорения $W_r(x)\geq\alpha$.

В *разделе 4.4* описывается программная реализация трех численных методов решения уравнения (11), представленных в САПАР – методов квадратур, кубической сплайн-аппроксимации и Монте-Карло. При реализации метода квадратур использовалась квадратурная формула трапеций. При аппроксимации решения кубическим сплайном учитывалась специфика граничных условий, состоящая в том, что $W_r'(0)=W_r(0)$, т.е. значение первой производной вероятности неразорения в левой граничной точке всегда известно. Применение метода Монте-Карло для решения уравнений Вольтерра 2-го рода (к этому типу относится уравнение Крамера) основано на том, что входящий в уравнение (11) интеграл всегда можно представить как математическое ожидание некоторой случайной величины. В САПАР представлены два алгоритма метода Монте-Карло, использующие для несмещенного оценивания интегрального оператора в заданной точке x две сопряженные статистики ξ_N и ξ_N^*.

Пример 6. (а) *модель Борча*, $X \sim Pa(2.5, 1)$, $\eta = (0.4, 0.5)$, $x = 2$, $a = 0.2$, *метод* – сплайн-аппроксимация, графический интерфейс – рис. 4.2а; (б) *обобщенная модель*, $X \sim Wei(1.5, 1.2)$, $\eta = (0.4, 0.5)$, $x = 1$, $r = 0.1$, $q = 0.2$, $s = 0.15$, *метод* – квадратур, графический интерфейс – рис. 4.2б. □



(а) График $W_x(r)$ **(б)** График $W_x(a)$

Рис. 4.2. Экранные формы представления решения $W_x(r) := W_r(x)$.

В пятой главе (разделы 5.1-5.6) приводятся общие сведения о разработанной в диссертации инструментальной среде анализа моделей риска – программном комплексе САПАР.

В *разделе 5.1* приводятся общие сведения о САПАР как BI-средстве анализа рисков. отмечается возможность включения САПАР в одну из существующих технологий типа Data Mining. *Раздел 5.2* посвящен описанию роли бизнес-аналитика при анализе моделей риска и принятии решений. Отмечается, что его основная роль состоит в выборе политики перестрахования, включающей в себя: выбор модели риска, способ дележа риска и раздела премии, критерий оптимизации риска, варианты перебора решений и т.д. *Раздел 5.3* содержит информацию об условиях выполнения программного комплекса САПАР, в том числе: основные сведения о распределениях риска, использованных в САПАР (всего 5 распределений), о дизайне и языке разработки пользовательского интерфейса (язык Visual FoxPro, версия 6.0, в среде WINDOWS XP), о минимальных требованиях, предъявляемых к аппаратно-программной платформе, на которую может быть установлен программный комплекс САПАР, примеры экранных форм, характеризующих дизайн пользовательского интерфейса. *Раздел 5.4* посвящен описанию состава алгоритмов САПАР. Приводятся классификация алгоритмов, полный их перечень, характеристика входных и выходных данных. В *разделе 5.5* представлены типовые сценарии работы пользователя с САПАР, в том числе: сценарий 1 работы пользователя с моделью индивидуального риска, сценарий 2 работы пользователя с моделью коллективного риска. В *разделе 5.6* приводятся примеры тестирования I- и C-алгоритмов САПАР.

В приложения 1-4 вынесены необходимые справочные данные о программном комплексе САПАР, необходимые для его использования.

В *приложении 1* представлены основные характеристики обобщенной модели перестрахования: моменты рисков Y и Z, обобщенное уравнение Крамера и характеристическое уравнение $\phi(r) = 0$. При соответствующих значениях вектора решений d получаем все частные случаи функций дележа риска, рассмотренные в диссертационной работе. В *приложении 2* приведены примеры экранных форм пользовательского интерфейса. *Приложение 3* содержит блок-схемы основных алгоритмов, *приложение 4* – доказательства теорем, на основании которых разработаны соответствующие алгоритмы САПАР.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Предложена обобщенная модель перестрахования, включающая комонотонные и некомонотонные схемы дележа риска, среди которых представлены все известные схемы пропорционального и непропорционального перестрахования.

2. Исследовано отношение порядка стоп лосс $\leq_{sl}$, для которого на основе $KNST$-условия пересечения функций распределения F_Y и F_Z получены уравнения границ областей $\leq_{sl}$-предпочтения в случае эксцедентных дележей риска.

3. Разработан комплекс I-алгоритмов оптимизации риска в модели индивидуального риска, позволяющий строить области $\leq_{sl}$-, W- и P-предпочтений для квотного и эксцедентного способов дележа риска.

4. Аналитически исследован классический процесс риска Крамера-Лундберга в случае перестрахования. Указана связь эксцедентного уравнения Крамера с уравнением Гамильтона-Якоби-Беллмана, используемым в теории управления.

5. Разработан комплекс C-алгоритмов численной оптимизации риска в модели коллективного риска Крамера-Лундберга, использующий методы квадратур, кубической сплайн-аппроксимации и Монте-Карло.

6. На основе разработанных алгоритмов создан программный комплекс САПАР, обладающий широким диапазоном применения и развитым графическим интерфейсом.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Ле Динь Шон.* Оптимальный уровень удержания при пропорциональном перестраховании, минимизирующий верхнюю границу вероятности разорения [Текст] / Ле Динь Шон // Тр. IV Всерос. ФАМ'2005 конф. по финансовой и актуарной математике и смежным вопросам. Часть 2. – Красноярск: ИВМ СО РАН, КрасГУ, КГТЭИ, изд-во "Гротеск", 2005. – С. 92-97.

2. *Ле Динь Шон.* Выбор оптимального уровня удержания в схеме эксцедентного перестрахования [Текст] / Ле Динь Шон // Тр. IV Всерос. ФАМ'2005 конф. по финансовой и актуарной математике и смежным вопросам. Часть 2. – Красноярск: ИВМ СО РАН, КрасГУ, КГТЭИ, изд-во "Гротеск", 2005. – С. 98-103.

3. *Крайнов, Д.Е.* Оптимизация риска в задачах пропорционального перестрахования [Текст] / Д.Е. Крайнов, Ле Динь Шон // Математические методы и информационные технологии в экономике, социологии и образовании: Сб. статей XV Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза: изд-во ПГТА, 2005. – С. 158-161.

4. *Крайнов, Д.Е.* Сравнительный анализ рисков на основе критериев оптимизации моментного типа [Текст] / Д.Е. Крайнов, Ле Динь Шон // Математические методы и информационные технологии в экономике, социологии и образовании: Сб. статей XV Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза: изд-во ПГТА, 2005. – С. 161-164.

5. *Григорьев, Ю.Д.* О мерах риска типа стоп лосс с одним и двумя уровнями удержания [Текст] / Ю.Д. Григорьев, Ле Динь Шон // Сб. док. междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям SCM-2005, г. Санкт-Петербург, 27-29 июня 2005 г. – СПб: СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2005. – С. 87-90.

6. *Grigor'ev, Yu.D.* Numerical optimization of Value-at-Risk functional for Stop Loss reinsurance in the Cramer-Lundberg risk model (Численная оптимизация функционала VaR для перестрахования стоп лосс в модели риска Лундберга-Крамера) [Текст] / Yu.D. Grigor'ev, Le Dinh Son // Modelling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems: Proc. V Int. Sci. School MA SR, St-Petersburg, Russia, June 28 – July 1, 2005. – P. 216-222.

7. *Григорьев, Ю.Д.* Об одном общем подходе к управлению стохастическими системами страхования, технического обслуживания и управления запасами [Текст] / Ю.Д. Григорьев, Ле Динь Шон // Информационные технологии и системы (управление, экономика, транспорт): Межвузов. сб. науч. тр. – СПб.: ООО "Андреевский издательский дом", 2005. – Вып. 1. – С. 41-48.

8. *Ле Динь Шон.* Сравнение различных численных методов решения интегрального уравнения Крамера в задаче эксцедентного перестрахования [Текст] / Ле Динь Шон // Информационные технологии и системы (управление, экономика, транспорт): межвуз. сб. науч. тр. – Вып. 1. – СПб.: ООО "Андреевский издательский дом", 2005. – С. 76-83.

9. *Григорьев, Ю.Д.* Задача эксцедентного перестрахования в модели Крамера - Лундберга [Текст] / Ю.Д. Григорьев, Ле Динь Шон // Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах: тр. междунар. науч. школы МА БР, г. Санкт-Петербург, 4-8 июля 2006 г. – СПб.: ГОУ ВПО "СПбГУАП", 2006. – С. 183-190.

10. *Григорьев, Ю.Д.* О комонотонных рисках в договорах перестрахования с двумя уровнями удержаний [Текст] / Ю.Д. Григорьев, Ле Динь Шон // Вестник Томского ГУ. Сер. Математика. Кибернетика. Информатика. – 2006. – Вып. 290. – С. 135-140.

11. *Григорьев, Ю.Д.* О стратегиях управления рисками в задачах перестрахования [Текст] / Ю.Д. Григорьев, Ле Динь Шон // Изв. СПбГЭТУ "ЛЭТИ" (Известия государственного электротехнического университета). Сер. Информатика, управление и компьютерные технологии. – 2006. – Вып. 1. – С. 47-52.