I. РАЗНОСТНЫЕ И ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЗАДАЧА КОШИ

Глава 1. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Две содержательные задачи, приводящие к разностным уравнениям

Задача 1. Конденсатор емкости C с начальным напряжением на нем U заряжается через сопротивление R от источника постоянной электродвижущей силы E ($E > U$) (рис.1.1). Требуется найти закон изменения напряжения на конденсаторе во времени $u = \varphi(t)$.

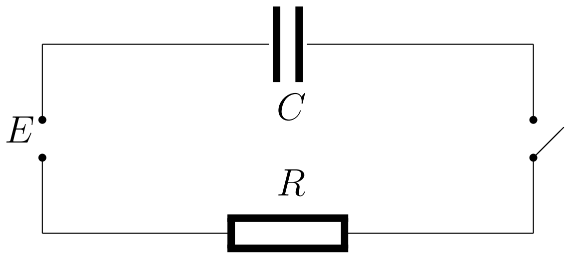

Рис.1.1

Будем считать, что ключ замыкается в момент времени $t = 0$, а напряжение на конденсаторе доступно для наблюдения (измерения) *только в узлах временной сетки*

$$t_k = k \cdot \Delta t; \qquad k = 0, 1, \dots,$$

где $\Delta t > 0$ – заданное число (шаг сетки). Будем обозначать $u_k = \varphi(t_k)$.

Ток в момент t_k равен, как известно,

$$i_k = \frac{E - u_k}{R}. \tag{1.1.1}$$

Известно также, что приращение заряда конденсатора q на отрезке времени $[t_k, t_{k+1}]$ равно

$$q_{k+1} - q_k = C \cdot (u_{k+1} - u_k) = \widetilde{i}_k \cdot \Delta t,$$

где $\widetilde{i}_k$ – среднее значение тока на интервале $]t_k, t_{k+1}[$.

Если положить в (1.1.1) $\widetilde{i}_k = i_k$, то получим

$$i_k = C \cdot \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t} = \frac{E - u_k}{R},$$

или

$$u_{k+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) \cdot u_k + \frac{\Delta t}{\tau} E \tag{1.1.2}$$

(здесь $\tau = RC$).

Если же положить в (1.1.1) $\widetilde{i}_k = i_{k+1}$, то получим

$$i_{k+1} = C \cdot \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t} = \frac{E - u_{k+1}}{R},$$

или

$$u_{k+1} = \frac{1}{1 + \dfrac{\Delta t}{\tau}} \cdot u_k + \frac{\dfrac{\Delta t}{\tau}}{1 + \dfrac{\Delta t}{\tau}} E. \qquad (1.1.3)$$

При известном начальном напряжении на конденсаторе $u_0 = U$ каждое из полученных уравнений позволяет определить последовательность значений напряжения на конденсаторе в любом узле временной сетки.

На рис.1.2 представлены графики решений уравнений (1.1.2) (точки) и (1.1.3) (звездочки) при $E = 1$, $U = 0$, $\dfrac{\Delta t}{\tau} = 0.4$. Заметим, что эти уравнения получены при *различных допущениях*, и их решения различны. Можно ожидать, что при уменьшении шага сетки (Δt) различие будет уменьшаться.

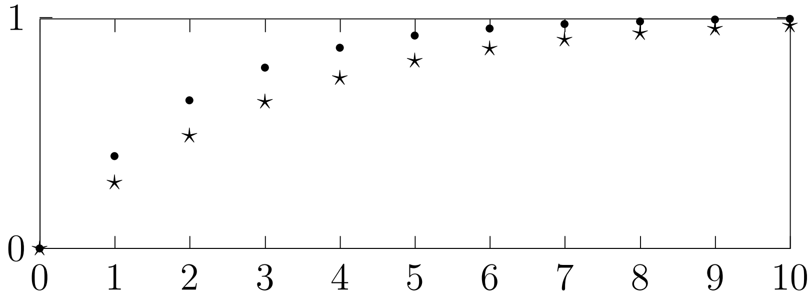

Рис.1.2

Задача 2. Тело массы m может скользить по вертикальному стержню (рис.1.3). Оно закреплено в таком положении, что в пружине, соединяющей его с "потолком отсутствует напряжение. В момент времени $t = 0$ тело освобождается и под действием силы тяжести начинает двигаться. Требуется найти закон изменения координаты центра масс этого тела во времени $x(t)$.

Будем считать, что координата центра масс измеряется *только в узлах временной сетки*

$$t_k = k \cdot \Delta t; \qquad k = 0, 1, \dots,$$

где $\Delta t > 0$ – заданное число (шаг сетки). Будем обозначать $x_k = x(t_k)$.

Согласно второму закону Ньютона, произведение массы тела на его ускорение w равно сумме сил, действующих на тело.

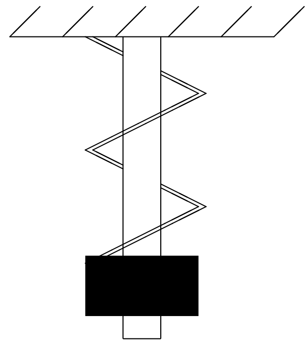

Рис.1.3

В нашей задаче к этим силам относятся:

1) сила тяжести

$$f_{\text{тяж}} = m \cdot g$$

(g – ускорение земного тяготения);

2) сила трения, которую мы *будем считать* пропорциональной скорости v (что допустимо в некоторых условиях)

$$f_{\text{тр}} = -a \cdot v$$

(знак минус показывает, что направления силы трения и скорости противоположны);

3) упругая сила пружины, которую мы *будем считать* (по закону Гука) пропорциональной координате

$$f_{\text{упр}} = -b \cdot x$$

(эта сила направлена противоположно смещению тела).

Запишем второй закон Ньютона в k-м узле временной сетки

$$m \cdot w_k = m \cdot g - a \cdot v_k - b \cdot x_k. \tag{1.1.4}$$

Заметим, что

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = \widetilde{v}_k, \tag{1.1.5}$$

$$\frac{v_{k+1} - v_k}{\Delta t} = \widetilde{w}_k, \tag{1.1.6}$$

где $\widetilde{v}_k$ и $\widetilde{w}_k$ – средние значения скорости и ускорения на интервале $]t_k, t_{k+1}[$.

Положим в (1.1.5) $\widetilde{v}_k = v_k$, а в (1.1.6) $\widetilde{w}_k = w_k$ (другие варианты замен в этой задаче мы рассматривать не будем, предоставив читателю сделать это в виде упражнения).

Учитывая (1.1.4), после несложных преобразований получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta t \cdot v_k \\ v_{k+1} = -\frac{b\Delta t}{m} \cdot x_k - \left(\frac{a\Delta t}{m} - 1\right) \cdot v_k + \Delta t \cdot g. \end{cases} \tag{1.1.7}$$

Система (1.1.7) позволяет при известных $x_0 = 0$ и $v_0 = 0$ найти значения последовательностей $(x_k)_{k=0}^{+\infty}$ и $(v_k)_{k=0}^{+\infty}$ в любом узле временной сетки.

Можно поступить и иначе. Выразим из первого уравнения (1.1.7) v_k через x_{k+1} и x_k (и, следовательно, v_{k+1} через x_{k+2} и x_{k+1}) и подставим эти выражения во второе уравнение. После преобразований получим (проверьте это!)

$$x_{k+2} = \left(2 - \frac{a \cdot \Delta t}{m}\right) \cdot x_{k+1} + \\ + \left(\frac{a \cdot \Delta t}{m} - \frac{b \cdot (\Delta t)^2}{m} - 1\right) \cdot x_k + (\Delta t)^2 \cdot g. \tag{1.1.8}$$

Условие $x_0 = 0$ по-прежнему выполнено, а условие $v_0 = 0$ дает $x_1 = 0$.

Уравнение (1.1.8) позволяет при известных $x_0 = 0$ и $x_1 = 0$ найти значение последовательности $(x_k)_{k=0}^{+\infty}$ в любом узле временной сетки.

Замечания. 1. Построенные нами уравнения принято называть *дискретными математическими моделями* рассмотренных содержательных задач.

2. Мы рекомендуем не забывать, что при построении математической модели неизбежны разного рода допущения. Поэтому *одна и та же* содержательная задача может привести к *существенно различным* математическим моделям. Процесс построения математической модели неалгоритмизируем. Постановщик задачи должен стремиться, с одной стороны, сохранить в модели основные характеристики содержательной задачи, а с другой – построить не слишком сложную математическую модель, т.е. модель, которая допускает анализ с помощью *современной* математики. Нетрудно понять, что примирение этих противоречивых требований часто требует незаурядного искусства.

1.2. Основные определения

Оба уравнения, полученные при формализации задачи **1** предыдущего пункта, являются частными случаями уравнения

$$x_{k+1} = a \cdot x_k + f_k, \tag{1.2.1}$$

которое называется *линейным разностным уравнением первого порядка с постоянным коэффициентом.*

Здесь a – заданное число (*коэффициент* уравнения), а $(f_k)_{k=0}^{+\infty}$ – заданная последовательность (*свободный член* уравнения).

Когда-то уравнения вида (1.2.1) записывали иначе, вынося в левую часть не x_{k+1}, а $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ – так называемые *первые разности* искомой последовательности. Поэтому уравнение называется *разностным.*

Это уравнение называется уравнением *первого порядка*, так как очередное значение искомой последовательности выражается через *одно предыдущее.*

Это уравнение называется *линейным*, ибо оно может быть записано в виде

$$\mathfrak{L}x = f,$$

где $\mathfrak{L}$ – *линейный оператор*, ставящий в соответствие последовательности (x_k) новую последовательность по правилу $(\mathfrak{L}x)_k = x_{k+1} - a \cdot x_k$ (вспомните определение линейного оператора).

И, наконец, это уравнение называют уравнением с *постоянным* коэффициентом, ибо коэффициент a не зависит от k.

Система уравнений (1.1.7), полученная при формализации задачи **2** п.1.1, является частным случаем системы двух линейных разностных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} x_{1,k+1} = a_{11}x_{1,k} + a_{12}x_{2,k} + f_{1,k} \\ x_{2,k+1} = a_{21}x_{1,k} + a_{22}x_{2,k} + f_{2,k} \end{cases}.$$

Здесь $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – заданные числа (коэффициенты системы), а $(f_{1,k})$ и $(f_{2,k})$ – заданные последовательности (свободные члены системы).

Несложно написать систему из трех, четырех и т. д. уравнений. Однако целесообразнее сразу перейти к матричной форме записи

$$x_{k+1} = A \cdot x_k + f_k. \tag{1.2.2}$$

Здесь A – квадратная числовая матрица порядка n, $(f_k)_{k=0}^{+\infty}$ – заданная последовательность числовых векторов, $(x_k)_{k=0}^{+\infty}$ – искомая последовательность числовых столбцов высоты n.

Сформулируем теперь *задачу Коши* для уравнения (1.2.2):

Построить последовательность числовых векторов $(x_k)_{k=0}^{+\infty}$, *удовлетворяющую уравнению* (1.2.2) *при заданном начальном векторе* x_0.

Замечания. 1. Казалось бы, формула (1.2.2) дает возможность вычислять решение задачи Коши: по заданному начальному вектору x_0 находится $x_1 = A \cdot x_0 + f_0$, затем $x_2 = A \cdot x_1 + f_1$ и т. д. Однако далее мы покажем, что этот простой алгоритм может оказаться *численно неустойчивым*. В то же время из (1.2.2) следует, что решение задачи Коши существует и единственно.

2. Нетрудно записать общий вид линейных разностных уравнений первого порядка с *переменными* коэффициентами:

$$x_{k+1} = A_k \cdot x_k + f_k.$$

Здесь $(A_k)_{k=0}^{+\infty}$ – заданная последовательность числовых матриц.

Можно также рассмотреть *нелинейные* разностные уравнения

$$x_{k+1} = \varphi(x_k),$$

где φ – некоторый функционал на $\mathbb{R}^n$.

Однако для таких уравнений нет общих методов решения, кроме численных; численные же методы, как уже указывалось, могут оказаться неустойчивыми. Поэтому мы ограничимся изучением *линейных* разностных уравнений с *постоянными* коэффициентами.

В задаче **2** п.1.1 была рассмотрена еще одна математическая модель. Она может быть обобщена так:

$$x_{k+2} = a_1 \cdot x_{k+1} + a_0 \cdot x_k + f_k. \tag{1.2.3}$$

Естественно назвать это уравнение линейным разностным уравнением *второго порядка* с постоянными коэффициентами (a_0 и a_1).

Вообще линейным разностным уравнением *порядка* m с постоянными коэффициентами называют уравнение

$$x_{k+m} = a_{m-1} \cdot x_{k+m-1} + \ldots a_0 \cdot x_k + f_k. \tag{1.2.4}$$

Задача Коши для него формулируется так:

Найти числовую последовательность $(x_k)_{k=0}^{+\infty}$, удовлетворяющую уравнению (1.2.4) при заданных начальных условиях $x_0, \ldots, x_{m-1}$.

Замечание. Всякое линейное разностное уравнение порядка m может быть преобразовано в эквивалентную систему из m линейных уравнений первого порядка.

Действительно, пусть дано уравнение второго порядка

$$x_{k+2} = a_1 \cdot x_{k+1} + a_0 \cdot x_k + f_k.$$

Введем новую последовательность $y_k = x_{k+1} - x_k$. Тогда

$$x_{k+2} = x_{k+1} + y_{k+1} = x_k + y_k + y_{k+1} = a_1 \cdot (x_k + y_k) + a_0 \cdot x_k + f_k.$$

Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} x_{k+1} &= & x_k &+ & y_k & & \\ y_{k+1} &= & (a_1 + a_0 - 1) \cdot x_k &+ & (a_1 - 1) \cdot y_k &+ & f_k. \end{cases}$$

Очевидно, что подобную операцию можно проделать с разностным уравнением любого порядка.

1.3. Производящая функция числовой последовательности

В этом пункте будет рассмотрен математический аппарат, позволяющий решать задачи Коши для линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

Определение. Пусть задана числовая последовательность (a_k). Если степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ *сходится не только в нуле*, то его сумму $\mathcal{A}(z)$ называют *производящей функцией последовательности* (a_k).

Примеры. 1. Пусть $a_k = 0$ при $k > N$. Тогда $\mathcal{A}(z) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k z^k$ – полином.

2. Пусть $a_k = \alpha^k$. Тогда $\mathcal{A}(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha^k z^k = \dfrac{1}{1 - \alpha z}$. Радиус сходимости этого ряда равен $\dfrac{1}{|\alpha|}$.

Условимся обозначать буквой $\mathcal{L}$ оператор, который ставит в соответствие последовательности ее производящую функцию. Тогда результат, полученный в примере **2**, примет вид

$$\mathcal{L}\left(\alpha^k\right) = \frac{1}{1 - \alpha z}; \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{1 - \alpha z}\right) = \left(\alpha^k\right).$$

3. Дифференцируя тождество $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha^k z^k = \dfrac{1}{1 - \alpha z}$ и сокращая на α, получим

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \alpha^k z^k = \frac{1}{(1 - \alpha z)^2}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{L}\left((k+1)\,\alpha^k\right)=\frac{1}{(1-\alpha z)^2};\qquad \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{(1-\alpha z)^2}\Big)=\left((k+1)\alpha^k\right).$$

4. Повторно дифференцируя, получим ($m\geq 1$)

$$\begin{gathered}\mathcal{L}\Big(\frac{(k+1)\dots(k+m-1)}{(m-1)!}\,\alpha^k\Big)=\frac{1}{(1-\alpha z)^m};\\ \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{(1-\alpha z)^m}\Big)=\Big(\frac{(k+1)\dots(k+m-1)}{(m-1)!}\,\alpha^k\Big).\end{gathered}\tag{1.3.1}$$

Рассмотрим некоторые свойства производящих функций.

1. Если $c_k=\alpha a_k+\beta b_k,\;\; k=0,1,\dots,$ то

$$\mathcal{L}\left(c_k\right)=\alpha\mathcal{L}\left(a_k\right)+\beta\mathcal{L}\left(b_k\right).$$

Это очевидно следует из свойств степенных рядов.

$\mathcal{L}$ – линейный оператор.

2. Пусть $\mathcal{L}\left(a_k\right)=\mathcal{A}(z)$, т.е. $\mathcal{A}(z)=a_0+a_1z+\dots+a_nz^n+\dots$. Тогда $z^m\cdot\mathcal{A}(z)=a_0z^m+a_1z^{m+1}+\dots+a_nz^{n+m}+\dots$, т.е.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(z^m\cdot\mathcal{A}(z)\right)=\left(b_k\right),$$

где $b_0=\dots=b_{m-1}=0;\;\; b_k=a_{k-m}$ при $k\geq m$.

Умножение производящей функции на z^m ($m\in\mathbb{N}$) вызывает "запаздывание" последовательности на m шагов.

3. Перемножая степенные ряды

$$\mathcal{A}(z)=a_0+a_1z+\dots+a_nz^n+\dots,$$

$$\mathcal{B}(z)=b_0+b_1z+\dots+b_nz^n+\dots$$

и замечая, что коэффициент при z^k в произведении равен

$$a_0b_k+a_1b_{k-1}+\dots+a_kb_0=\sum_{j=0}^{k}a_jb_{k-j},$$

получим

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{A}(z)\cdot\mathcal{B}(z)\right) = \Big(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\Big).$$

Определение. Последовательность $\Big(\sum\limits_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\Big)_{k=0}^{+\infty}$ называют *сверткой* последовательностей (a_k) и (b_k) и обозначают $((a*b)_k)$.

Производящая функция свертки двух последовательностей равна произведению производящих функций этих последовательностей.

Производящая функция последовательности векторов определяется как вектор, компоненты которого – производящие функции последовательностей-компонент. Для векторных производящих функций справедливы все перечисленные свойства.

1.4. Решение задачи Коши для разностных уравнений первого порядка

Задача Коши (в матричной форме) имеет вид

$$x_{k+1} = A\cdot x_k + f_k; \qquad x_0 \text{ – заданный начальный вектор.} \tag{1.4.1}$$

Умножим уравнение на z^{k+1} и просуммируем по k. Если обозначить $\mathcal{X}(z) = \mathcal{L}(x_k)$, $\mathcal{F}(z) = \mathcal{L}(f_k)$, то получим

$$\mathcal{X}(z) - x_0 = z\cdot\left(A\cdot\mathcal{X}(z) + \mathcal{F}(z)\right).$$

Отсюда

$$(I - zA)\cdot\mathcal{X}(z) = x_0 + z\cdot\mathcal{F}(z) \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{X}(z) = (I - zA)^{-1}\cdot\left(x_0 + z\cdot\mathcal{F}(z)\right).$$

Заметим, что все элементы матрицы $I - zA$ – полиномы второго порядка относительно z. Поэтому ее определитель и все алгебраические дополнения – полиномы относительно z. Вспоминая, что элементы обратной матрицы суть отношения алгебраических дополнений к определителю, видим, что они являются рациональными дробями.

Если компоненты вектора $\mathcal{F}(z)$ – рациональные дроби, то и компоненты вектора $\mathcal{X}(z)$ будут рациональными дробями. Если рациональная дробь неправильная, то выделим ее целую часть – полином, а оставшуюся правильную дробь разложим на простейшие. Найдя для каждой простейшей дроби соответствующую ей последовательность по формуле (1.3.1), сложим эти последовательности и добавим последовательность, соответствующую полиному. Результат и будет решением задачи Коши.

Если компоненты $\mathcal{F}(z)$ не являются рациональными дробями, то следует найти последовательности

$$\mathcal{L}^{-1}\left((I-zA)^{-1}\cdot x_0\right) \qquad \text{и} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(z\cdot(I-zA)^{-1}\mathcal{F}(z)\right),$$

а затем использовать свойство **3** п.1.3:

$$\mathcal{L}^{-1}\left((I-zA)^{-1}\cdot x_0 + z\cdot(I-zA)^{-1}\cdot\mathcal{F}(z)\right) = \\ = \mathcal{L}^{-1}\left((I-zA)^{-1}\cdot x_0\right) + \Big(\mathcal{L}^{-1}\left(z\cdot(I-zA)^{-1}\right) * f\Big).$$

Пример. Рассмотрим задачу Коши (1.4.1) при $n=2$ с

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 49.5 & 99.5 \end{bmatrix}, \qquad x_0=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Выполним описанные выше операции:

$$I-zA=\begin{bmatrix} 1-z & -z \\ -49.5z & 1-99.5z \end{bmatrix};$$

$$(I-zA)^{-1}=\frac{1}{1-100.5z+50z^2}\cdot\begin{bmatrix} 1-99.5z & z \\ 49.5z & 1-z \end{bmatrix};$$

$$(I-zA)^{-1}\cdot x_0=\frac{1}{3(1-0.5z)}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad x_k=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (1.4.2)$$

Серьезное предупреждение. Сравним первую компоненту решения, полученную по формуле (1.4.2) (второй столбец таблицы) и вычисленную "в лоб т.е. по формуле $x_{k+1}=A\cdot x_k$ (третий столбец таблицы).

Эффект, наблюдаемый в третьем столбце, объясняется тем, что семейство всех решений нашего разностного уравнения имеет вид

$$x_k=100^k\cdot A_1x_0+\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot A_2x_0,$$

где

$$A_1=\frac{1}{199}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 99 & 198 \end{bmatrix}; \quad A_2=\frac{1}{199}\cdot\begin{bmatrix} 198 & -2 \\ -99 & 1 \end{bmatrix}.$$

k		
0	6.666667E-01	6.666667E-01
1	3.333333E-01	3.333334E-01
2	1.666667E-01	1.666697E-01
3	8.333334E-02	8.363286E-02
4	4.166667E-02	7.161875E-02
5	2.083333E-02	3.016042E+00
6	1.041667E-02	2.995313E+02
7	5.208333E-03	2.995209E+04
8	2.604167E-03	2.995208E+06
9	1.302083E-03	2.995208E+08

Таким образом, кроме *убывающей* геометрической прогрессии со знаменателем 1/2 решение может содержать *быстро растущую* геометрическую прогрессию со знаменателем 100. В нашем примере эта быстро растущая последовательность подавлялась за счет *специального подбора начальных условий* ($A_1 x_0 = \theta$). При счете "в лоб" она возникает из-за погрешностей машинной арифметики и быстро становится доминирующей (посмотрите на четыре последних строки в таблице).

Этот пример показывает, что решать разностные уравнения "в лоб" без предварительного тщательного их анализа недопустимо.

1.5. Решение задачи Коши для уравнений высших порядков

Выше было показано, что задача Коши для разностного уравнения, порядок которого выше единицы, может быть преобразована в эквивалентную задачу Коши для векторного разностного уравнения первого порядка. Однако иногда целесообразно решать задачу в ее исходном виде.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения порядка n:

$$x_{k+n} = p_{n-1} \cdot x_{k+n-1} + \dots + p_0 \cdot x_k + f_k \quad (p_0 \neq 0); \quad x_0, \dots, x_{n-1} \quad \text{заданы.}$$

Умножив обе части уравнения на z^{k+n} и просуммировав по k, получим

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_{k+n} z^{k+n} = p_{n-1} z \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} x_{k+n-1} z^{k+n-1} + \dots$$
$$\dots + p_0 z^n \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} x_k z^k + z^n \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} f_k z^k. \quad (1.5.1)$$

Обозначим $\mathcal{L}\left(f_k\right) = \mathcal{F}(z)$, $\mathcal{L}\left(x_k\right) = \mathcal{X}(z)$. Тогда (1.5.1) примет вид

$$\mathcal{X}(z) - x_0 - \dots - x_{n-1}z^{n-1} =$$

$$= p_{n-1}z \cdot \left(\mathcal{X}(z) - x_0 - \dots - x_{n-2}z^{n-2}\right) + \dots + p_0 z^n \cdot \mathcal{X}(z) + z^n \cdot \mathcal{F}(z).$$

Решив это уравнение относительно $\mathcal{X}(z)$, получим

$$\mathcal{X}(z) = \frac{Q(z)}{1 - p_{n-1}z - \dots p_0 z^n} + z^n \cdot \frac{1}{1 - p_{n-1}z - \dots p_0 z^n} \cdot \mathcal{F}(z).$$

Здесь $Q(z)$ – полином *порядка* n (его коэффициенты определяются начальными условиями).

Если $\mathcal{F}(z)$ – рациональная дробь, то $\mathcal{X}(z)$ также будет рациональной дробью. Если эта дробь неправильная, то выделяем целую часть – полином. Оставшуюся правильную дробь следует разложить на простейшие, а затем для каждой простейшей дроби найти соответствующую ей последовательность по формуле (1.3.1). Искомая последовательность (x_k) будет суммой этих последовательностей и последовательности, соответствующей полиному.

Если $\mathcal{F}(z)$ не является рациональной дробью, то следует найти последовательности

$$(u_k) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{Q(z)}{1 - p_{n-1}z - \dots p_0 z^n}\Big), \qquad (v_k) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{z^n}{1 - p_{n-1}z - \dots p_0 z^n}\Big),$$

после чего решение найдется по формуле

$$x_k = u_k + (v * f)_k.$$

Замечание. Предупреждаем, что реализовать последний алгоритм удается чрезвычайно редко!

Глава 2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Содержательные задачи, приводящие к обыкновенным дифференциальным уравнениям

В п.1.1 мы построили *дискретные* математические модели двух содержательных задач. Теперь мы будем считать, что состояние динамической системы (напряжение на конденсаторе в задаче **1**, координата и скорость тела в задаче **2**) можно наблюдать (измерять) в любой момент времени, а не только в узлах временной сетки. Соответствующие математические модели принято называть непрерывными (в литературе используется также термин *континуальные*[1]).

Предполагая напряжение на конденсаторе в задаче **1** непрерывно дифференцируемой функцией, перейдем в равенстве

$$\widetilde{i}_k = C \cdot \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t} = C \cdot \frac{u(t_k + \Delta t) - u(t_k)}{\Delta t}$$

к пределу ($\Delta t = 0$). Получим $i = C \cdot u'$.

Подставляя результат в (1.1.1), найдем

$$u' = -\frac{1}{\tau} \cdot u + \frac{1}{\tau} \cdot E \tag{2.1.1}$$

Здесь, как и раньше, $\tau = RC$.

Аналогично, считая координату и скорость тела в задаче **2** непрерывно дифференцируемыми функциями, перейдем в равенствах (1.1.5) и (1.1.6) к пределу ($\Delta t = 0$). Получим $v = x'$, $w = v'$.

Подставляя $w = v'$ во второй закон Ньютона

$$m \cdot w = m \cdot g - a \cdot v - b \cdot x$$

(см. (1.1.4)), придем к системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & v \\ v' & = & -\dfrac{b}{m} \cdot x - \dfrac{a}{m} \cdot v + g. \end{array} \right. \tag{2.1.2}$$

Если продифференцировать первое из уравнений системы (2.1.2) и исключить из второго уравнения скорость, то получим вместо

[1] continuum (лат.) – непрерывное.

системы *одно* уравнение, но содержащее в отличие от системы *вторую* производную искомой функции:

$$x'' = -\frac{a}{m} \cdot x' - \frac{b}{m} \cdot x + g. \tag{2.1.3}$$

2.2. Основные определения

Полученная в п.2.1 континуальная математическая модель задачи о заряде конденсатора (2.1.1) является частным случаем *обыкновенного* дифференциального уравнения *первого порядка, линейного, с постоянным коэффициентом*

$$x' = a \cdot x + f. \tag{2.2.1}$$

Здесь a – заданное число (*коэффициент* уравнения), f – заданная непрерывная функция (*свободный член* уравнения), x – искомая функция.

Замечание. Функции, входящие в (2.2.1), всегда считаются определенными на некотором промежутке. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем считать, что этот промежуток – *сегмент* $[\alpha, \beta]$.

Уравнение (2.2.1) называется

дифференциальным, так как содержит операцию дифференцирования искомой функции;

обыкновенным – так принято называть дифференциальные уравнения для функций одной переменной (в отличие от уравнений *в частных производных*);

первого порядка, ибо старшая из входящих в него производных – первая;

линейным – так как оно может быть записано в виде $\mathfrak{L}(x) = f$, где $\mathfrak{L}(x) = x' - a \cdot x$ – *линейный* (убедитесь в этом!) оператор.

Наконец, это уравнение с *постоянным* коэффициентом – в отличие от линейного уравнения с *переменным* коэффициентом, в котором a не число, а заданная на $[\alpha, \beta]$ непрерывная функция.

Терминологическое замечание. Поскольку в этой главе рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения, мы будем опускать слово "обыкновенное" и говорить *дифференциальное уравнение*, а иногда и просто *уравнение*.

Система (2.1.2) есть частный случай системы n линейных уравнений первого порядка с *постоянными* коэффициентами

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + f_1 \\ \qquad \dots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + f_n \end{cases},$$

которая в матричной форме имеет вид

$$x' = A \cdot x + f. \tag{2.2.2}$$

Здесь A – квадратная числовая матрица порядка n, $f = [f_1, \dots, f_n]^T$ – заданный вектор-столбец высоты n из функций, непрерывных на $[\alpha, \beta]$, $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ – искомый вектор-столбец из функций.

Если элементы матрицы A – не числа, а функции, непрерывные на $[\alpha, \beta]$, получаем систему линейных уравнений первого порядка с *переменными* коэффициентами.

Запишем, наконец, систему *нелинейных* уравнений первого порядка

$$\begin{cases} x_1' = \varphi_1(t; x_1, \dots, x_n) \\ \qquad \dots \\ x_n' = \varphi_n(t; x_1, \dots, x_n) \end{cases}, \tag{2.2.3}$$

где $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – функции, непрерывные на $[\alpha, \beta] \times \Omega$, а Ω – все пространство $\mathbb{R}^n$ или его часть.

В этой главе мы будем рассматривать *задачу Коши* для уравнения (2.2.1) и для систем (2.2.2), (2.2.3):

Найти непрерывно дифференцируемую на $[\alpha, \beta]$ функцию (соответственно, вектор-функцию) $x(t)$, которая в каждой точке сегмента обращает уравнение (2.2.1) (соответственно, (2.2.2) или (2.2.3)) в тождество и, кроме того, удовлетворяет начальным условиям, заданным в точке $t_0 \in [\alpha, \beta]$: $x(t_0) = x_0$.

Терминологическое замечание. Задачу Коши называют также *начальной задачей*, или задачей с начальными условиями (initial value problem). Применительно к теории динамических систем – это задача определения закона движения системы при заданном начальном ее положении.

Обобщая уравнение (2.1.3), запишем линейное уравнение n-го порядка с *постоянными* коэффициентами (здесь $a_0, \dots, a_{n-1}$ – числа)

$$x^{(n)} = a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0 x + f. \tag{2.2.4}$$

Если коэффициенты в (2.2.4) – функции, непрерывные на $[\alpha, \beta]$, получаем линейное уравнение n-го порядка с *переменными* коэффициентами.

Наконец, можно рассматривать *нелинейное* уравнение порядка n

$$x^{(n)} = \varphi\big(t; x, x', \ldots, x^{(n-1)}\big), \tag{2.2.5}$$

где φ – функция, непрерывная на $[\alpha, \beta] \times \Omega$, а Ω – все пространство $\mathbb{R}^n$ или его часть.

Замечание. Так же, как в случае разностных уравнений, дифференциальное уравнение порядка n может быть преобразовано в равносильную систему из n уравнений первого порядка.

Действительно, вводя обозначения

$$y_1 = x, \quad y_2 = x' = y_1', \quad \ldots\ , \quad y_n = x^{(n-1)} = y_{n-1}',$$

получим из уравнения (2.2.5) систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \ldots \\ y_n' = \varphi(t; y_1, \ldots, y_n) \end{cases}.$$

Однако обратный переход не всегда возможен. Покажем это на простейшем примере. Пусть дана система двух линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2 \end{cases},$$

где f_1 и f_2 – *непрерывные* на $[\alpha, \beta]$ функции. Попытка исключить из этой системы искомую функцию x_2 приведет к необходимости дифференцирования одного из уравнений. Но свободный член этого уравнения по условию лишь непрерывен и может оказаться недифференцируемым!

Мы обращаем на это обстоятельство внимание читателя, так как в курсах по теории линейных электрических цепей с постоянными параметрами часто сводят системы уравнений первого порядка к уравнению высокого порядка, дифференцируя при этом *недифференцируемые функции*. При этом возникают так называемые *обобщенные функции*, требующие для квалифицированного использования уровня математической подготовки, недостижимого в технических университетах.

Более того, матричная техника делает процесс решения системы уравнений не более сложным, чем решение одного уравнения. Поэтому сведение системы к одному уравнению нецелесообразно даже в случае, когда возможно.

2.3. Линейное уравнение первого порядка с постоянным коэффициентом

Мы ищем непрерывно дифференцируемую функцию $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, которая:

1) является решением уравнения (2.2.1), т.е.

$$x'(t) \equiv a \cdot x(t) + f(t), \qquad t \in [\alpha, \beta];$$

2) удовлетворяет *начальному условию*, т.е. $x(t_0) = x_0$, где t_0 – заданная точка из $[\alpha, \beta]$, x_0 – заданное число.

Начнем с рассмотрения случая, когда $f(t) \equiv 0$ (*однородное* уравнение, соответствующее уравнению (2.2.1)).

Во избежание путаницы обозначим теперь искомую функцию другой буквой. Итак, рассмотрим задачу Коши

$$z' = a \cdot z; \qquad z(t_0) = z_0. \tag{2.3.1}$$

Теорема. Задача Коши (2.3.1) (a, t_0, z_0 – произвольные вещественные числа) имеет на любом промежутке, содержащем точку t_0 (в том числе на $\mathbb{R}$) единственное решение, которое задается формулой

$$z(t) = exp\,(a(t - t_0)) \cdot z_0 \tag{2.3.2}$$

Доказательство. Подставляя (2.3.2) в (2.3.1), убеждаемся, что эта функция действительно является решением задачи Коши.

Докажем теперь, что найденное решение задачи Коши единственно. Пусть $z(t)$ – решение (2.3.2), а $w(t)$ – *какое-нибудь* решение *той же* задачи Коши (2.3.1), т.е.

$$w'(t) \equiv a \cdot w(t); \qquad w(t_0) = z_0. \tag{2.3.3}$$

Введем функцию $u(t) = exp\,(-a(t - t_0)) \cdot w(t)$. Тогда, очевидно, $w(t) = exp\,(a(t - t_0)) \cdot u(t)$. Подставим это выражение в (2.3.3):

$$exp\,(a(t - t_0)) \cdot u'(t) + a \cdot exp\,(a(t - t_0)) \cdot u(t) \equiv$$
$$\equiv a \cdot exp\,(a(t - t_0)) \cdot u(t); \qquad u(t_0) = z_0.$$

Отсюда $exp\,(a(t - t_0)) \cdot u'(t) \equiv 0$, а так как экспонента в нуль не обращается, получаем $u'(t) \equiv 0$. Тогда $u(t) = const$, и с учетом $u(t_0) = z_0$ имеем $u(t) \equiv z_0$. Следовательно, $w(t) \equiv z(t)$. ■

Следствие. Функция, удовлетворяющая однородному уравнению $z' = a \cdot z$ *на промежутке*, либо не обращается в нуль ни в одной точке этого промежутка, либо равна на нем нулю тождественно.

Перейдем теперь к задаче Коши для неоднородного уравнения:

$$x' = a \cdot x + f; \qquad x(t_0) = x_0 \tag{2.3.4}$$

Ее решение будем искать в виде

$$x(t) = exp\,(a(t - t_0)) \cdot v(t), \tag{2.3.5}$$

где v – новая искомая функция (сравните (2.3.5) с (2.3.2): константа z_0 заменена на функцию v, поэтому рассматриваемый метод называется методом *вариации постоянной*).

Подставляя (2.3.5) в (2.3.4), получаем

$$exp\,(a(t - t_0)) \cdot v'(t) + a \cdot exp\,(a(t - t_0)) \cdot v(t) =$$
$$= a \cdot exp\,(a(t - t_0)) \cdot v(t) + f(t); \qquad v(t_0) = x_0.$$

Отсюда $v'(t) = exp\,(-a(t - t_0)) \cdot f(t)$. Интегрируя это равенство, получаем

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} exp\,(-a(\gamma - t_0)) \cdot f(\gamma) d\gamma.$$

Учитывая, что $v(t_0) = x_0$, и подставляя результат в (2.3.5), получим после несложных преобразований

$$x(t) = exp\,(a(t - t_0)) \cdot x_0 + \int_{t_0}^{t} exp\,(a(t - \gamma)) \cdot f(\gamma) d\gamma. \tag{2.3.6}$$

Покажем теперь, что это *единственное* решение задачи Коши. Пусть x – функция, заданная формулой (2.3.6), а w – какое-нибудь решение той же задачи Коши, т.е.

$$w' = a \cdot w + f; \quad w(t_0) = x_0.$$

Тогда разность двух решений задачи Коши $z = x - w$ удовлетворяет однородному уравнению (2.3.1) (проверьте это!), и в одной точке эта разность обращается в нуль: $z(t_0) = 0$. По следствию из доказанной выше теоремы эта разность равна нулю *тождественно.* ■

Таким образом, доказана

Теорема. Задача Коши (2.3.4) (f – непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция, $t_0 \in [\alpha, \beta]$, x_0 – произвольное вещественное число) имеет единственное решение, которое задается на $[\alpha, \beta]$ формулой (2.3.6).

Пример. В п.2.1 было выведено дифференциальное уравнение (2.1.1), описывающее закон изменения напряжения на конденсаторе при зарядке последнего от источника постоянной электродвижущей силы. Добавив начальное условие $u(0) = U$, получим задачу Коши:

$$u' = -\frac{1}{\tau} \cdot u + \frac{1}{\tau} \cdot E; \qquad u(0) = U \qquad (U < E).$$

Ее решение дается формулой (2.3.6) при $a = -\frac{1}{\tau}$, $\quad f(t) = \frac{E}{\tau}$:

$$u(t) = exp\Big(-\frac{t}{\tau}\Big) \cdot U + \frac{E}{\tau} \cdot \int\limits_0^t exp\Big(-\frac{t-\gamma}{\tau}\Big) d\gamma =$$

$$= exp\Big(-\frac{t}{\tau}\Big) \cdot U + \Big(1 - exp\Big(-\frac{t}{\tau}\Big)\Big) \cdot E.$$

Замечания. 1. Метод вариации постоянной называют также *методом Лагранжа*.

2. Как видно из формулы (2.3.6), решение линейного уравнения есть сумма двух слагаемых:

$exp\,(a(t-t_0)) \cdot x_0$ представляет собой изменение состояния линейной динамической системы за счет начального запаса энергии в этой системе (ненулевое начальное условие);

$\int\limits_{t_0}^{t} exp\,(a(t-\gamma)) \cdot f(\gamma) d\gamma$ есть изменение состояния линейной динамической системы за счет внешнего воздействия на эту систему (свободного члена уравнения).

3. В приложениях часто встречаются задачи вида (2.3.4), в которых f – не непрерывная, а лишь кусочно непрерывная на сегменте функция. В этом случае уравнение не может, конечно, выполняться в точках разрыва функции f.

Вспомним определение первообразной для кусочно непрерывной функции f: это кусочно гладкая, непрерывная функция, производная которой совпадает с f в точках непрерывности f. По аналогии, решением уравнения (2.3.4) с кусочно непрерывным свободным членом f назовем кусочно гладкую *непрерывную* функцию, удовлетворяющую этому уравнению во всех точках непрерывности f. Иначе говоря, решение должно быть первообразной от правой части уравнения (2.3.4).

Задачу (2.3.4) с кусочно непрерывным свободным членом можно решать "по кускам". Поясним это на примере.

Пусть $t_0 = \alpha$, и функция f на $[\alpha, \beta]$ имеет единственную точку разрыва λ. Тогда определим решение на $[\alpha, \lambda]$ по формуле (2.3.6), а затем решим новую задачу Коши на $[\lambda, \beta]$, считая полученное на первом шаге значение $x(\lambda)$ новым начальным условием. Если точек разрыва больше одной, эту операцию нужно применить несколько раз.

Однако несложно видеть (проверьте это!), что при этом во всех точках промежутка $[\alpha, \beta]$ решение $x(t)$ будет задаваться формулой (2.3.6). Поэтому доказанная теорема справедлива и для уравнения с кусочно непрерывным на $[\alpha, \beta]$ свободным членом.

4. Формула (2.3.6) содержит интеграл. Таким образом, она является как бы "полуфабрикатом" решения: мы свели проблему отыскания решения задачи Коши к проблеме вычисления интеграла.

2.4. Система линейных уравнений первого порядка с постоянной матрицей

Пусть заданы n непрерывных на $[\alpha, \beta]$ функций $f_1 \ldots, f_n$, числовая $n \times n$-матрица A, числовой столбец $x^{(0)} = [x_1^{(0)} \ldots x_n^0]^T$ и точка $t_0 \in [\alpha, \beta]$.

Запишем задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянной матрицей

$$x' = A \cdot x + f; \quad x(t_0) = x^{(0)}. \tag{2.4.1}$$

Здесь $f = [f_1 \ldots f_n]^T$; $x = [x_1 \ldots x_n]^T$ – искомая вектор-функция.

Как и в предыдущем пункте, начнем с рассмотрения задачи Коши для *однородной* системы

$$z' = A \cdot z; \quad z(t_0) = z^{(0)}. \tag{2.4.2}$$

<u>Теорема</u>. Задача Коши (2.4.2) имеет на любом промежутке, содержащем точку t_0, единственное решение, которое задается формулой

$$z(t) = exp\left(A(t - t_0)\right) \cdot z^{(0)}. \tag{2.4.3}$$

<u>Доказательство</u>. Полагая $t = t_0$, убеждаемся, что z удовлетворяет начальному условию. Далее, дифференцируя ряд, задающий матричную экспоненту, получаем

$$\big(exp(At)\big)' = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{A^k\, t^k}{k!}\right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kA^k\, t^{k-1}}{k!} =$$

$$= A \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^{k-1}\, t^{k-1}}{(k-1)!} = A \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A^j\, t^j}{j!} = A \cdot exp(At),$$

откуда

$$z'(t) = \Big(exp\,(A(t-t_0))\Big)' \cdot z^{(0)} = A \cdot exp\,(A(t-t_0)) \cdot z^{(0)} = A \cdot z(t).$$

Докажем теперь, что найденное решение единственно. Пусть $z(t)$ – решение (2.4.3), а $w(t)$ – *какое-нибудь* решение *той же* задачи Коши, т.е.

$$w' \equiv A \cdot w; \qquad w(t_0) = z^{(0)}. \tag{2.4.4}$$

Введем вектор-функцию $u(t) = exp\,(-A(t-t_0)) \cdot w(t)$. Тогда по свойству матричной экспоненты $w(t) = exp\,(A(t-t_0)) \cdot u(t)$. Подставим это выражение в (2.4.4):

$$exp\,(A(t-t_0)) \cdot u'(t) + A \cdot exp\,(A(t-t_0)) \cdot u(t) \equiv$$
$$\equiv A \cdot exp\,(A(t-t_0)) \cdot u(t); \quad u(t_0) = z^{(0)}.$$

Отсюда $exp\,(A(t-t_0)) \cdot u'(t) \equiv \theta_n$, а так как экспонента – обратимая матрица, получаем, что $u'(t) \equiv \theta_n$. С учетом начального условия имеем $u(t) \equiv z^{(0)}$. Следовательно, $w(t) \equiv z(t)$. ■

Замечания. 1. Обратите внимание, что эти рассуждения почти дословно повторяют доказательство аналогичных утверждений из п.2.3.

2. Из формулы (2.4.3) видно, что множество *всех* решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей есть n-мерное линейное пространство.

Перейдем теперь к задаче Коши для неоднородной системы (2.4.1).

Теорема. Задача Коши (2.4.1) имеет единственное решение

$$x(t) = exp\big(A(t-t_0)\big) \cdot x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{t} exp\big(A(t-\gamma)\big) \cdot f(\gamma)d\gamma. \tag{2.4.5}$$

Мы не приводим доказательство этой теоремы, так как оно состоит в почти дословном повторении доказательства аналогичной теоремы из предыдущего пункта (с учетом свойств матричной экспоненты).

Замечания. 1. Нетрудно убедиться, что формула (2.3.6) есть частный случай формулы (2.4.5).

2. Остается в силе замечание **2** из п.2.3: решение *линейной* системы дифференциальных уравнений (изменение состояния *линейной* динамической системы) есть сумма двух слагаемых. Первое представляет собой изменение состояния динамической системы за счет начального запаса энергии. Второе является реакцией на внешнее воздействие.

3. Аналогично замечанию **3** из п.2.3 определяется решение задачи (2.4.1) в случае, когда f – вектор-функция с кусочно непрерывными на $[\alpha, \beta]$ компонентами. Формула (2.4.5), так же как и теорема существования и единственности решения, остается справедливой и в этой ситуации.

4. К уже отмеченной в замечании **4** из п.2.3 проблеме вычисления интеграла добавляется теперь не менее сложная проблема построения матричной экспоненты.

2.5. Решение линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами с помощью преобразования Лапласа

В приложениях часто встречается случай, когда начальное условие задают в точке $t_0 = 0$, свободный член является оригиналом, а решение задачи Коши

$$x' = A \cdot x + f; \quad x(0) = x^{(0)} \tag{2.5.1}$$

ищут на промежутке $[0, +\infty[$. В этом случае решение задается формулой (2.4.5) при $t \geq 0$. Если положить $x(t) = f(t) = 0$ при $t < 0$, то можно записать

$$x(t) = \left(exp(At) \cdot x^{(0)} + \int\limits_0^t exp\big(A(t-\gamma)\big) \cdot f(\gamma) d\gamma \right) \cdot \delta_1(t). \tag{2.5.2}$$

Здесь δ_1 – функция Хевисайда.

Заметим, что интеграл в (2.5.2) представляет собой свертку матрицы-функции $exp(At) \cdot \delta_1(t)$ со свободным членом системы (2.5.1). Из свойств матричной экспоненты следует экспоненциальная ограниченность элементов матрицы $exp(At)$. Поэтому $exp(At) \cdot \delta_1(t)$ – оригинал. Далее, свертка оригиналов и сумма оригиналов – оригиналы. Следовательно, функция x, заданная формулой (2.5.2), является оригиналом. Поэтому функция $x' = A \cdot x + f$ также оригинал.

Применив к обеим частям системы (2.5.1) преобразование Лапласа (покомпонентно), имеем

$$s \cdot \widetilde{x}(s) - x^{(0)} = A \cdot \widetilde{x}(s) + \widetilde{f}(s). \tag{2.5.3}$$

Решая эту систему *линейных алгебраических уравнений*, получим *изображение* решения

$$\widetilde{x}(s) = (sI - A)^{-1} \cdot \left(\widetilde{f}(s) + x^{(0)} \right). \tag{2.5.4}$$

Из формул Крамера следует, что элементы матрицы $(sI-A)^{-1}$ – это рациональные дроби, числители которых – алгебраические дополнения элементов матрицы $(sI - A)$, т.е. полиномы *порядка* n, а общий знаменатель – определитель этой матрицы, т.е. полином *степени* n. Поэтому все элементы матрицы $(sI - A)^{-1}$ – *правильные* рациональные дроби, полюсы которых – собственные числа матрицы A.

В часто встречающемся случае, когда изображения компонент вектора свободных членов – также правильные рациональные дроби, элементы вектора $\widetilde{x}(s)$ оказываются правильными рациональными дробями, оригиналы которых находятся известным способом.

Пример. Решим задачу Коши для системы (2.1.2):

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -\dfrac{b}{m}\cdot x - \dfrac{a}{m}\cdot v + g \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ (заданы начальная координата и начальная скорость груза).

Выполним преобразование Лапласа:

$$\begin{cases} s\cdot\widetilde{x} - x_0 = \widetilde{v} \\ s\cdot\widetilde{v} - v_0 = -\dfrac{b}{m}\cdot\widetilde{x} - \dfrac{a}{m}\cdot\widetilde{v} + \dfrac{g}{s} \end{cases},$$

т.е.

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ \dfrac{b}{m} & s+\dfrac{a}{m} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 + \dfrac{g}{s} \end{bmatrix}.$$

Решив эту систему, найдем изображения компонент вектора-решения задачи Коши:

$$\widetilde{x} = \frac{x_0\cdot s^2 + \left(\dfrac{ax_0}{m} + v_0\right)\cdot s + g}{s\cdot\left(s^2 + \dfrac{a}{m}\cdot s + \dfrac{b}{m}\right)}; \qquad \widetilde{v} = \frac{v_0\cdot s + g - \dfrac{bx_0}{m}}{s^2 + \dfrac{a}{m}\cdot s + \dfrac{b}{m}}.$$

Если корни квадратного трехчлена $s^2 + \dfrac{a}{m}\cdot s + \dfrac{b}{m}$ различны, то, обозначив их s_1 и s_2 , получим

$$x(t) = \frac{g}{s_1 s_2} + \frac{1}{s_1 - s_2}\cdot\Bigg(\Big(\big(s_1 + \frac{a}{m}\big)x_0 + v_0 + \frac{g}{s_1}\Big)\cdot exp(s_1 t) - \\ - \Big(\big(s_2 + \frac{a}{m}\big)x_0 + v_0 + \frac{g}{s_2}\Big)\cdot exp(s_2 t)\Bigg);$$

$$v(t) = \frac{1}{s_2 - s_1} \cdot \Big(\Big(\frac{bx_0}{m} - s_1 v_0 - g \Big) \cdot exp(s_1 t) -$$

$$- \Big(\frac{bx_0}{m} - s_2 v_0 - g \Big) \cdot exp(s_2 t) \Big).$$

Если корни квадратного трехчлена совпадают: $s_1 = s_2 = -\frac{a}{2m}$, то

$$x(t) = \frac{4m^2}{a^2} \cdot g +$$

$$+ \Big(\Big(x_0 - \frac{4m^2 g}{a^2} \Big) + \Big(v_0 + \frac{ax_0}{2m} - \frac{2mg}{a} \Big) \cdot t \Big) \cdot exp\Big(-\frac{a}{2m} t \Big);$$

$$v(t) = \Big(v_0 + \Big(g - \frac{av_0}{2m} - \frac{a^2 x_0}{4m^2} \Big) \cdot t \Big) \cdot exp\Big(-\frac{a}{2m} t \Big).$$

Замечания. 1. Мы сознательно опустили множитель $\delta_1(t)$, ибо полученные функции являются решениями системы (2.1.2) *при всех* $t \in \mathbb{R}$.

2. Описанный алгоритм может применяться для построения матричной экспоненты как решения матричной задачи Коши

$$X' = A \cdot X; \quad X(0) = I_n,$$

где I_n – единичная матрица.

3. Если компоненты изображения свободного члена не являются правильными рациональными дробями, то можно попытаться восстановить решение по полученному изображению с помощью достаточно богатых таблиц, содержащихся в справочниках (например, Г. Деч. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – М.: Физматгиз, 1960). Если эта попытка не приведет к успеху, то целесообразно обратиться к численным методам решения задачи Коши.

2.6. Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Пусть f_0 – непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция; $a_0, \dots, a_{n-1}$ – заданные числа. Рассмотрим уравнение

$$x^{(n)} = a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x + f_0. \tag{2.6.1}$$

Здесь x – искомая n раз непрерывно дифференцируемая на $[\alpha, \beta]$ функция.

Введем следующие обозначения:

$$y_1 = x; \quad y_2 = y_1' = x'; \quad \dots \quad y_n = y_{n-1}' = x^{(n-1)}.$$

Тогда уравнение (2.6.1) перепишется в виде системы уравнений первого порядка

$$y' = A \cdot y + f, \tag{2.6.2}$$

где

$$y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T = [x, x', \dots, x^{(n-1)}]^T, \quad f = [0, 0, ..., f_0]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, если y – решение системы (2.6.2), то компонента y_n непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$. Из предпоследнего уравнения системы видно, что y_{n-1} дважды непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$, и т. д. Наконец, компонента y_1 n раз непрерывно дифференцируема и является решением уравнения (2.6.1). Таким образом, система (2.6.2) равносильна уравнению (2.6.1).

В задаче Коши для системы (2.6.2) требуется задание начального вектора в некоторой точке $t_0 \in [\alpha, \beta]$:

$$y(t_0) = y^{(0)} = [y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}]^T = [x_0, x_0', \dots, x_0^{(n-1)}]^T.$$

Теперь мы можем сформулировать задачу Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами: найти n раз непрерывно дифференцируемую на $[\alpha, \beta]$ функцию x, которая является решением уравнения (2.6.1), т.е.

$$x^{(n)}(t) \equiv a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 x(t) + f(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

и удовлетворяет начальным условиям, т.е.

$$x(t_0) = x_0, \ x'(t_0) = x_0', \ \dots, \ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)},$$

где $x_0, x_0', \dots, x_0^{(n-1)}$ – заданные числа.

Поскольку эта задача Коши равносильна задаче Коши для системы уравнений первого порядка, ее решение существует и единственно.

На практике уравнения высших порядков иногда не сводят к системе, а решают непосредственно. Для иллюстрации рассмотрим

Пример. Решим задачу Коши для уравнения (2.1.3):

$$x'' = -\frac{a}{m}\cdot x' - \frac{b}{m}\cdot x + g$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$ и $x'(0) = v_0$ (заданы начальная координата и начальная скорость груза).

Применим преобразование Лапласа. Поскольку

$$\mathcal{L}(x') = s\cdot\widetilde{x} - x_0; \quad \mathcal{L}(x'') = s^2\cdot\widetilde{x} - s\cdot x_0 - v_0,$$

имеем $s^2\cdot\widetilde{x} - s\cdot x_0 - v_0 = -\frac{a}{m}\cdot(s\cdot\widetilde{x} - x_0) - \frac{b}{m}\cdot\widetilde{x} + \frac{g}{s}$. Решив это уравнение, найдем

$$\widetilde{x} = \frac{x_0\cdot s^2 + \left(\frac{a}{m}\cdot x_0 + v_0\right)\cdot s + g}{s\cdot\left(s^2 + \frac{a}{m}\cdot s + \frac{b}{m}\right)}.$$

Оригинал этого изображения был получен в примере п.2.5.

Замечание. Если f_0 – кусочно непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция, то решение уравнения (2.6.1) следует понимать как функцию, у которой $(n-1)$-я производная совпадает с одной из первообразных правой части (2.6.1). Таким образом, решение в этом случае $n-1$ раз непрерывно дифференцируемо на $[\alpha, \beta]$, а его $(n-1)$-я производная является кусочно гладкой, и уравнение выполняется почти всюду на $[\alpha, \beta]$.

2.7. Линейное уравнение первого порядка с переменным коэффициентом

Пусть заданы непрерывные функции $a, f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Уравнение

$$x' = a(t)\cdot x + f(t) \tag{2.7.1}$$

называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка с *переменным* коэффициентом $a(t)$. Задача Коши для него ставится так: найти непрерывно дифференцируемую на $[\alpha, \beta]$ функцию x, которая удовлетворяет уравнению (2.7.1), т.е.

$$x'(t) \equiv a(t)\cdot x(t) + f(t), \qquad t \in [\alpha, \beta],$$

а также удовлетворяет начальному условию $x(t_0) = x_0$ ($t_0 \in [\alpha, \beta]$ – заданная точка).

Теорема. Задача Коши, сформулированная выше, имеет решение, и это решение единственно.

Доказательство. Вначале рассмотрим задачу Коши для соответствующего *однородного* уравнения

$$z' = a(t) \cdot z; \quad z(t_0) = z_0.$$

Решение этой задачи будем искать в виде

$$z(t) = exp\,(w(t)) \cdot z_0, \tag{2.7.2}$$

где w – новая искомая функция. Подставляя (2.7.2) в уравнение, получим $exp\,(w(t)) \cdot w'(t) = a(t) \cdot exp\,(w(t))$. Сокращая на $exp\,(w(t)) \neq 0$, получаем $w'(t) = a(t)$. Из начального условия $z(t_0) = exp\,(w(t_0)) \cdot z_0 = z_0$ найдем $w(t_0) = 0$. Поэтому $w(t) = \int\limits_{t_0}^{t} a(\gamma)d\gamma$. Итак,

$$z(t) = exp\Bigg(\int\limits_{t_0}^{t} a(\gamma)d\gamma \Bigg) \cdot z_0.$$

Далее применяем уже известный метод Лагранжа: ищем решение задачи Коши для неоднородного уравнения в виде

$$x(t) = exp\Bigg(\int\limits_{t_0}^{t} a(\gamma)d\gamma \Bigg) \cdot u(t). \tag{2.7.3}$$

Подставляя (2.7.3) в уравнение (2.7.1), получим

$$exp\Bigg(\int\limits_{t_0}^{t} a(\gamma)d\gamma \Bigg) \cdot a(t) \cdot u(t) + exp\Bigg(\int\limits_{t_0}^{t} a(\gamma)d\gamma \Bigg) \cdot u'(t) =$$

$$= a(t) \cdot exp\Bigg(\int\limits_{t_0}^{t} a(\gamma)d\gamma \Bigg) \cdot u(t) + f(t).$$

Отсюда $u'(t) = exp\Big(-\int\limits_{t_0}^{t} a(\gamma)d\gamma \Big) \cdot f(t)$. Интегрируя, получаем

$$u(t) - x_0 = \int\limits_{t_0}^{t} exp\Bigg(-\int\limits_{t_0}^{\omega} a(\gamma)d\gamma \Bigg) \cdot f(\omega)d\omega.$$

Подстановка результата в (2.7.3) дает

$$x(t) = exp\Big(\int\limits_{t_0}^{t} a(\gamma)d\gamma\Big) \cdot x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} exp\Big(\int\limits_{\omega}^{t} a(\gamma)d\gamma\Big) \cdot f(\omega)d\omega. \qquad (2.7.4)$$

Единственность этого решения может быть доказана методом, аналогичным использованному в п.2.3. ■

Замечания. 1. Использовать формулу (2.7.4) для практических вычислений удается чрезвычайно редко, так как входящие в нее два интеграла обычно через табулированные функции не выражаются.

2. Из (2.7.4) видно, что решение задачи Коши (2.7.1) представляет собой сумму двух слагаемых: изменения состояния линейной динамической системы за счет начального запаса энергии в ней (ненулевое начальное условие) и реакции на внешнее воздействие (свободный член уравнения).

3. Формула (2.7.4) верна и в случае, когда коэффициент a и свободный член f – кусочно непрерывные на $[\alpha, \beta]$ функции.

4. Легко видеть, что если $a = const$, то (2.7.4) сводится к (2.3.6).

2.8. Система линейных уравнений первого порядка с переменной матрицей

Пусть A – квадратная матрица порядка n, элементы которой – непрерывные на $[\alpha, \beta]$ функции; $x^{(0)} = [x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}]^T$ – заданный числовой столбец; $f = [f_1, \ldots, f_n]^T$ – вектор-функция, непрерывная на $[\alpha, \beta]$.

Рассмотрим задачу Коши:

$$x' = A(t) \cdot x + f(t); \qquad x(t_0) = x^{(0)}. \qquad (2.8.1)$$

Существование и единственность решения этой задачи Коши следует из теоремы, доказательство которой мы опускаем:

Теорема. Для любой непрерывной на $[\alpha, \beta]$ матрицы-функции $A(t)$ и любого $t_0 \in [\alpha, \beta]$ существует единственная непрерывно дифференцируемая на $[\alpha, \beta]$ матрица-функция $W(t, t_0)$ со следующими свойствами:

1. $D_t W(t, t_0) = A(t) \cdot W(t, t_0)$;

2. $W(t_0, t_0) = I$.

Более того, матрица W обладает следующими свойствами:

3. $det\,(W(t, t_0)) \neq 0$ при всех $t \in [\alpha, \beta]$;

4. для любых трех точек t_1, t_2, t_3 на $[\alpha, \beta]$

$$W(t_1, t_3) = W(t_1, t_2) \cdot W(t_2, t_3).$$

Матрицу W называют *фундаментальной матрицей однородной системы* $z' = A(t) \cdot z$.

Замечание. Если A – *постоянная* матрица, то нетрудно убедиться, что $W(t, t_0) = exp\,(A(t - t_0))$. К сожалению, в общем случае не существует *не численного* алгоритма построения фундаментальной матрицы.

Решение задачи Коши для однородной системы

$$z' = A(t) \cdot z; \qquad z(t_0) = z^{(0)}$$

имеет вид $z(t) = W(t, t_0) \cdot z^{(0)}$ (убедиться в этом можно, подставив $z(t)$ в систему с учетом свойств W). Отсюда, как и в случае системы с постоянной матрицей, можно видеть, что множество *всех* решений однородной системы есть n-мерное линейное пространство.

Решение задачи Коши для неоднородной системы можно найти уже известным методом Лагранжа. Оно имеет вид

$$x(t) = W(t, t_0) \cdot x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{t} W(t, \gamma) \cdot f(\gamma) d\gamma. \tag{2.8.2}$$

Легко видеть, что (2.4.5) – частный случай (2.8.2).

Отметим еще раз, что решения задач Коши для всех рассмотренных типов *линейных* дифференциальных уравнений представляются в виде суммы двух слагаемых: изменения состояния линейной динамической системы за счет начального запаса энергии в ней (ненулевое начальное условие) и реакции на внешнее воздействие (свободный член уравнения).

2.9. Линейные уравнения высших порядков с переменными коэффициентами

Иногда формализация прикладной задачи естественным образом приводит к задаче Коши для линейного уравнения порядка $n > 1$:

$$x^{(n)} = a_{n-1}(t) x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t) x' + a_0(t) x + f(t);$$
$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}.$$

Так же, как в п.2.6, доказывается, что эта задача Коши эквивалентна задаче Коши для системы уравнений первого порядка и, следовательно, для нее справедлива сформулированная теорема существования и единственности решения.

Какие-либо общие *формальные* методы решения этой задачи отсутствуют. Поэтому мы рассмотрим лишь *метод степенных рядов*, пригодный для линейных уравнений, коэффициенты и свободный член которых *аналитичны* в окрестности начальной точки (напомним, что для существования и единственности решения задачи Коши достаточно лишь непрерывности коэффициентов и свободного члена). *Можно показать, что* справедлива

Теорема. Если коэффициенты и свободный член уравнения аналитичны при $|t-t_0|<R$, то и решение аналитично на этом интервале.

Изложение метода проведем на примере задачи Коши для уравнения второго порядка

$$x''=p(t)\cdot x'+q(t)\cdot x+f(t);\quad x(t_0)=\alpha;\ x'(t_0)=\beta.$$

Пусть

$$\begin{aligned} p(t)&=p_0+p_1(t-t_0)+\dots+p_n(t-t_0)^n+\dots;\\ q(t)&=q_0+q_1(t-t_0)+\dots+q_n(t-t_0)^n+\dots;\\ f(t)&=f_0+f_1(t-t_0)+\dots+f_n(t-t_0)^n+\dots,\end{aligned}$$

и все эти ряды сходятся при $|t-t_0|<R$. Обозначим $\tau=t-t_0$ и будем искать решение задачи Коши в виде ряда

$$x(t)=x_0+x_1\tau+\dots+x_n\tau^n+\dots$$

(т.е. будем искать числа $x_0,x_1,\dots,x_n,\dots$ – коэффициенты этого ряда). Дифференцируя дважды ряд-решение и подставляя все ряды в уравнение, получим тождество:

$$\begin{gathered}1\cdot2\cdot x_2+2\cdot3\cdot x_3\tau+\dots+(n-1)\cdot n\cdot x_n\tau^{n-2}+\dots\equiv\\ \equiv(p_0+p_1\tau+\dots+p_n\tau^n+\dots)\cdot(x_1+2\cdot x_2\tau+\dots+n\cdot x_n\tau^{n-1}+\dots)+\\ +(q_0+q_1\tau+\dots+q_n\tau^n+\dots)\cdot(x_0+x_1\tau+\dots+x_n\tau^n+\dots)+\\ +f_0+f_1\tau+\dots+f_n\tau^n+\dots\end{gathered}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях τ в обеих частях этого тождества, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов ряда-решения:

$$\begin{aligned}1\cdot2\cdot x_2&=p_0x_1+q_0x_0+f_0;\\ 2\cdot3\cdot x_3&=2p_0x_2+p_1x_1+q_0x_1+q_1x_0+f_1;\\ &\dots\\ (n-1)\cdot n\cdot x_n&=(n-1)p_0x_{n-1}+\dots+p_{n-2}x_1+\\ &+q_0x_{n-2}+\dots+q_{n-2}x_0+f_{n-2};\\ &\dots\end{aligned}$$

Из начальных условий находим

$$x_0 = x(t_0) = \alpha; \qquad x_1 = x'(t_0) = \beta.$$

Первое уравнение системы дает возможность определить x_2, второе – x_3, и т. д. (обратите внимание на то, что уравнение для x_n содержит в правой части только уже известные числа $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$).

2.10. Нелинейные дифференциальные уравнения

В предыдущих пунктах была рассмотрена задача Коши для наиболее часто встречающихся в приложениях *линейных* уравнений с *постоянными* коэффициентами и систем таких уравнений. Были также приведены основные сведения о задаче Коши для *линейных* уравнений с *переменными коэффициентами.* Сейчас мы рассмотрим задачу Коши для уравнения первого порядка общего вида

$$x' = f(t, x); \qquad x(t_0) = x_0.$$

Здесь f – *непрерывная* вещественная функция двух переменных, заданная на прямоугольнике $[\alpha, \beta] \times]c, d[, \quad t_0 \in [\alpha, \beta],\ x_0 \in]c, d[$.

Отметим геометрическую интерпретацию такого дифференциального уравнения: оно связывает координаты точки на плоскости (t, x) с угловым коэффициентом касательной, проведенной в этой точке к графику решения уравнения. Этот график обычно называют *интегральной кривой* уравнения. Таким образом, уравнение задает *поле направлений* своих интегральных кривых.

Пользуясь введенной терминологией, задачу Коши можно сформулировать так: найти интегральную кривую уравнения, проходящую через заданную точку плоскости.

Можно показать, что имеет место

Теорема. 1. Через каждую точку прямоугольника, на котором непрерывна функция f, проходит *хотя бы одна* интегральная кривая уравнения $x' = f(t, x)$.

2. Если на этом прямоугольнике непрерывна и частная производная $D_x f$, то через каждую его точку проходит *ровно одна* интегральная кривая этого уравнения.

При разрывной производной $D_x f$ задача Коши может иметь более одного решения. Так, например, задача Коши

$$x' = 2\sqrt{x}, \qquad x(0) = 0,$$

имеет два решения на $[0, +\infty[$: $x_1(t) \equiv 0$ и $x_2(t) = t^2$ (через начало координат проходят *две* интегральные кривые).

Как сказал классик русской литературы, все *линейные* уравнения линейны одинаково, но всякое *нелинейное* уравнение нелинейно по-своему. Поэтому не существует каких-либо общих *формальных* ("формульных") методов решения задачи Коши. Мы ограничимся рассмотрением одного часто встречающегося случая – так называемого уравнения с разделенными переменными:

$$x' = R(t) \cdot Q(x).$$

Предполагая, что Q не обращается в нуль на $]c, d[$, преобразуем уравнение к виду $x'/Q(x) = R(t)$. Интегрируя это равенство по промежутку $[t_0, t]$, получим

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{x'(\tau)d\tau}{Q\left(x(\tau)\right)} = \int\limits_{t_0}^{t} R(\tau)d\tau.$$

Сделав в левом интеграле подстановку $x(\tau) = y$, получим

$$\int\limits_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dy}{Q(y)} = \int\limits_{t_0}^{t} R(\tau)d\tau.$$

Пусть W – первообразная для R, а S – первообразная для $1/Q$. Тогда

$$S\left(x(t)\right) - S(x_0) = W(t) - W(t_0). \qquad (2.10.1)$$

Итак, для "аналитического" (формального) решения задачи Коши необходимо:

1) найти первообразные для функций R и $1/Q$;

2) разрешить уравнение (2.10.1) относительно переменной x.

Очевидно, что успех достигается лишь в исключительных случаях.

2.11. Численные методы решения задачи Коши

До конца XIX века усилия разработчиков теории обыкновенных дифференциальных уравнений были направлены в основном на поиск решений отдельных типов уравнений в классе так называемых квадратур, т.е. "элементарных" ("школьных") функций, их первообразных и композиций. Нередко вводились новые, так называемые "специальные" функции, к которым относят некоторые первообразные от "элементарных" функций (с примерами их вы познакомились в курсе математического анализа), а также решения некоторых дифференциальных уравнений, важных для приложений (например, функции Бесселя – решения уравнения Бесселя). Свойства этих функций хорошо изучены, были построены подробные таблицы их значений.

Этот путь был, по-видимому, единственным возможным для практических приложений в отсутствие эффективных вычислительных средств. С появлением ЭВМ постепенно утратили свое значение таблицы – их заменили компьютерные программы (конечно, не следует забывать, что создание этих программ стало возможным только благодаря информации о специальных функциях, накопленной в докомпьютерную эпоху!). Затем были разработаны эффективные программы, реализующие численные методы решения задачи Коши для широкого класса дифференциальных уравнений. Если добавить к этому имеющиеся ныне возможности графического представления полученных численными методами решений, то станет ясной бессмысленность попыток заставить будущего *пользователя* выучить "методы" решения большого количества *частных* видов задачи Коши. Достаточно адресовать его к справочникам (например, Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям[2]. – М.: Наука, 1971) или к одной из сред конечного пользователя (например, MATHEMATICA или MAPLE), которые умеют решать все типы уравнений, до сих пор заполняющие учебники математики для ВТУЗов.

Заметим еще, что даже в случае, когда уравнение содержится в справочнике, от полученного формального решения толку может оказаться немного. Например, уравнение с разделенными переменными допускает формальное решение, но задача Коши при этом фактически "передается в другой цех" – сводится к задаче построения двух первообразных, в общем случае неалгоритмизируемой.

В этом пункте мы рассмотрим некоторые алгоритмы построения приближенного решения задачи Коши.

<u>Серьезное предупреждение</u>. Перед применением любого численного метода необходимо ответить на два вопроса:

1. Существует ли решение данной задачи Коши?
2. Если существует, то единственно ли оно?

[2]Эта работа содержит решения около 1650 уравнений.

Имеется целый ряд теорем, которые отвечают на эти вопросы. Одна из них приведена в предыдущем пункте.

Заметим, что эта теорема гарантирует существование решения задачи Коши не на заданном промежутке, а *лишь в некоторой окрестности начальной точки.*

Пример. Рассмотрим задачу Коши $x' = 1 + x^2$, $x(0) = 0$. Функция $f(t, x) \equiv 1 + x^2$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши на всей плоскости, т.е. через каждую точку плоскости проходит единственная интегральная кривая. Нетрудно убедиться, что через начало координат проходит график решения $x = tg(t)$, которое определено только на $]-\pi/2, \pi/2[$ и не может быть продолжено на больший промежуток.

Вопрос о существовании решения на заданном промежутке непрост. Не имея возможности остановиться на нем подробно, отметим лишь, что для *линейных* уравнений и систем эта проблема не возникает – их решение всегда определено на том же промежутке, на котором определены коэффициенты и свободный член.

Построение численного решения задачи Коши начинается с того, что на сегменте $[t_0, t_n = T]$ задается сетка $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$. Далее вычисляются значения приближенного решения на этой сетке $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Определение. *Погрешностью метода* называется число

$$\max_{1 \le k \le n} (|x_k - x(t_k)|).$$

Мы рассмотрим два наиболее простых численных метода решения задачи Коши: метод Эйлера и метод "прогноз-коррекция".

Метод Эйлера

Решается задача Коши

$$x' = f(t, x); \quad x(t_0) = x_0.$$

В точке (t_0, x_0) (рис.2.1), лежащей на интересующей нас интегральной кривой, известна касательная к этой кривой, так как ее угловой коэффициент равен $f(t_0, x_0)$. Идея метода Эйлера состоит в замене движения по *неизвестной* интегральной кривой (**1** на рис.2.1) движением по *известной* касательной к этой кривой. Сделав один шаг, мы перейдем в точку с координатами (t_1, x_1), где t_1 задано, а $x_1 = x_0 + f(t_0, x_0) \cdot (t_1 - t_0)$.

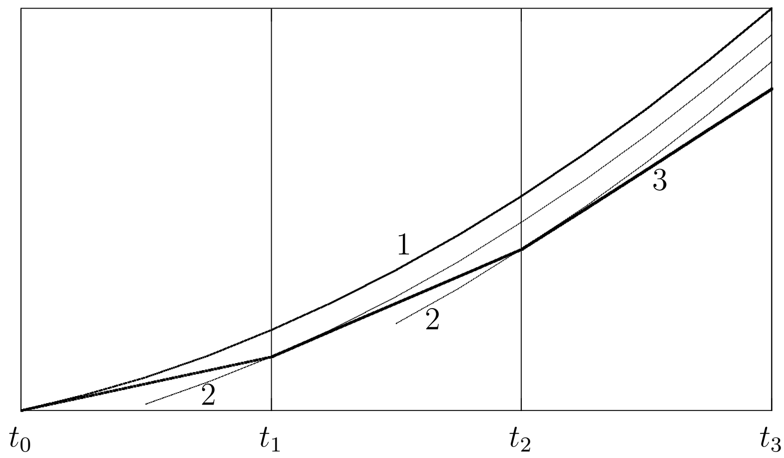

Рис.2.1. (1) – искомая интегральная кривая,
(2) – "побочные" интегральные кривые,
(3) – ломаная Эйлера

Второй шаг метода Эйлера отличается от первого тем, что движение происходит по касательной к интегральной кривой (**2** на рис.2.1), проходящей через точку (t_1, x_1) (следует помнить, что это уже *другая интегральная кривая!*). Последующие шаги аналогичны второму. Таким образом искомая интегральная кривая заменяется ломаной (**3** на рис.2.1) – она называется *ломаной Эйлера*.

Оценим погрешность метода Эйлера для случая равномерной сетки. Обозначим начальную абсциссу t_0, конечную $t_n = T$, а шаг сетки – $h = \dfrac{T - t_0}{n}$.

Теорема. Если как график решения $x(t)$, так и построенные по методу Эйлера точки (t_1, x_1), $\ldots$, (t_n, x_n) не выходят из прямоугольника Δ, на котором ограничены первые производные функции f, то для погрешности метода имеет место оценка

$$\max_{1 \le k \le n} (|x_k - x(t_k)|) \le \frac{C}{n},$$

где C – некоторая положительная константа.

Доказательство. Подставим в уравнение $x' = f(t, x)$ решение задачи Коши (*в существовании и единственности которого мы предварительно убедились*) и проинтегрируем *тождество* $x'(t) \equiv f(t, x(t))$ по сегменту $[t_k, t_{k+1}]$. Получим

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, x(\tau))\, d\tau. \qquad (2.11.1)$$

В то же время по методу Эйлера

$$x_{k+1} = x_k + f(t_k, x_k) \cdot h = x_k + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_k, x_k) d\tau. \tag{2.11.2}$$

Вычитая (2.11.2) из (2.11.1) и обозначая $e_k = x(t_k) - x_k$, получим

$$e_{k+1} = e_k + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left(f\left(\tau, x(\tau)\right) - f(t_k, x_k)\right) d\tau. \tag{2.11.3}$$

Представим подынтегральную функцию в (2.11.3) в виде суммы

$$f\left(\tau, x(\tau)\right) - f(t_k, x_k) =$$
$$= \big(f\left(\tau, x(\tau)\right) - f\left(t_k, x(t_k)\right)\big) + \big(f\left(t_k, x(t_k)\right) - f(t_k, x_k)\big).$$

Применим формулу конечных приращений к первому слагаемому:

$$f\left(\tau, x(\tau)\right) - f\left(t_k, x(t_k)\right) = \left(D_\tau f + D_x f \cdot f\right)\left(\widetilde{\tau}, x(\widetilde{\tau})\right) \cdot (\tau - t_k)$$

($\widetilde{\tau}$ – некоторая точка на интервале $]t_k, \tau[$).

Обозначив $A = \sup\limits_{\Delta}\left(|D_\tau f + D_x f \cdot f|\right)$, получим

$$\Big|f\left(\tau, x(\tau)\right) - f\left(t_k, x(t_k)\right)\Big| \le A \cdot (\tau - t_k). \tag{2.11.4}$$

Применим формулу конечных приращений ко второму слагаемому:

$$f\left(t_k, x(t_k)\right) - f(t_k, x_k) = D_x f(t_k, \widetilde{x}) \cdot (x(t_k) - x_k) = D_x f(t_k, \widetilde{x}) \cdot e_k$$

($\widetilde{x}$ – некоторая точка между x_k и $x(t_k)$).

Обозначив $B = \sup\limits_{\Delta}\left(|D_x f|\right)$, получим

$$\Big|f\left(t_k, x(t_k)\right) - f(t_k, x_k)\Big| \le B \cdot |e_k|. \tag{2.11.5}$$

Из (2.11.3), (2.11.4) и (2.11.5) следует

$$|e_{k+1} - e_k| \le \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \Big|\big(f\left(\tau, x(\tau)\right) - f(t_k, x_k)\big)\Big| d\tau \le$$

$$\le \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \Big|f\left(\tau, x(\tau)\right) - f\left(t_k, x(t_k)\right)\Big| d\tau + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \Big|f\left(t_k, x(t_k)\right) - f(t_k, x_k)\Big| d\tau \le$$

$$\le A \cdot \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} (\tau - t_k) d\tau + B \cdot |e_k| \cdot \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} d\tau = A \cdot \frac{h^2}{2} + B \cdot |e_k| \cdot h.$$

Поэтому

$$|e_{k+1}| \le |e_{k+1} - e_k| + |e_k| \le (1 + B \cdot h) \cdot |e_k| + A \cdot \frac{h^2}{2}.$$

Выписывая это неравенство для $k = 0, 1, \ldots, n-1$, получим

$$|e_1| \le A \cdot \frac{h^2}{2};$$

$$|e_2| \le (1 + B \cdot h) \cdot A \cdot \frac{h^2}{2} + A \cdot \frac{h^2}{2} = (1 + (1 + B \cdot h)) \cdot A \cdot \frac{h^2}{2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|e_n| \le \Big(1 + (1 + B \cdot h) + \cdots + (1 + B \cdot h)^{n-1}\Big) \cdot A \cdot \frac{h^2}{2} =$$

$$= \frac{(1 + B \cdot h)^n - 1}{2B} \cdot A \cdot h = \left(\left(1 + \frac{B \cdot (T - t_0)}{n}\right)^n - 1\right) \cdot \frac{A \cdot (T - t_0)}{2Bn}.$$

Из формулы Тейлора

$$ln(1 + x) = x - \frac{1}{2(1 + \xi)^2} x^2$$

(ξ – некоторая точка между 0 и x) видно, что $ln(1 + x) \le x$ при всех $x > -1$. Поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$

$$n \cdot ln\left(1 + \frac{B \cdot (T - t_0)}{n}\right) \le B \cdot (T - t_0).$$

Подставляя это неравенство в оценку для e_n, получим

$$|e_n| \le \Big(exp\,(B \cdot (T - t_0)) - 1\Big) \cdot \frac{A \cdot (T - t_0)}{2B} \cdot \frac{1}{n} = \frac{C}{n}. \qquad \blacksquare$$

Из полученной оценки следует, что погрешность метода Эйлера можно сделать сколь угодно малой, увеличивая количество узлов сетки.

Замечание. В практических вычислениях обычно используют тот же метод дробления шага, что и в численном интегрировании: удваивают количество узлов сетки до тех пор, пока у двух соседних приближений не совпадет заданное количество значащих цифр. При этом необходимо помнить, что такие косвенные методы контроля точности, будучи достаточно простыми, не дают полной гарантии достоверности результата.

Метод "прогноз-коррекция"

Если бы мы могли вычислить интеграл в формуле (2.11.1), то получили бы значение решения задачи Коши в очередном узле сетки. Метод

Эйлера можно интерпретировать как замену подынтегральной функции в (2.11.1) сплайном первого порядка (константой), что приводит к квадратурной формуле *левых прямоугольников*. Можно рассчитывать, что погрешность метода уменьшится, если использовать сплайн второго порядка, т.е. квадратурную *формулу трапеций*

$$x_{k+1} = x_k + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f\left(\tau, x(\tau)\right) d\tau \cong x_k + \frac{f(t_k, x_k) + f(t_{k+1}, x_{k+1})}{2} \cdot h.$$

Однако эту формулу применить нельзя, так как в ее правой части стоит неизвестное пока число $f(t_{k+1}, x_{k+1})$. Поэтому каждый шаг метода прогноз-коррекция разбивается на два подшага: предварительный (прогноз) выполняется по методу Эйлера

$$\widetilde{x}_{k+1} = x_k + f(t_k, x_k) \cdot h,$$

а заключительный (коррекция) – по формуле трапеций, причем вместо неизвестного x_{k+1} берется результат прогноза $\widetilde{x}_{k+1}$:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{f(t_k, x_k) + f(t_{k+1}, \widetilde{x}_{k+1})}{2} \cdot h.$$

Можно показать, что для равномерной сетки справедлива

Теорема. Если как график решения $x(t)$, так и построенные по методу "прогноз-коррекция" точки (t_k, x_k), $k = 1, \ldots, n$, не выходят из прямоугольника Δ, где ограничены *вторые* производные функции f, то имеет место оценка

$$\max_{1 \le k \le n} \left(|x(t_k) - x_k|\right) \le \frac{C}{n^2},$$

где C – некоторая положительная константа.

Замечания. 1. Существуют методы численного решения задачи Коши, использующие в формуле (2.11.1) сплайн-аппроксимации более высоких порядков. Доказано, что при использовании сплайна порядка m (*и при ограниченности m-х производных функции f*) имеет место неравенство $|x(t_k) - x_k| \le C/n^m$, $k = 1, \ldots, n$.

2. Численные методы естественным образом распространяются на задачу Коши для системы уравнений первого порядка.

3. Современная вычислительная математика располагает большим набором машинных программ для численного решения задачи Коши. Так, например, библиотека NAG содержит несколько десятков таких

программ. Среды конечного пользователя (MAPLE, MATHEMATICA, MATLAB) также обеспечивают численное решение задачи Коши.

4. Считаем необходимым еще раз подчеркнуть, что (как и для квадратурных формул) приведенные оценки погрешности получены в предположении *достаточной гладкости функции* f, т.е. при наличии у нее ограниченных частных производных достаточно высокого порядка.

2.12. Понятие устойчивости решения задачи Коши

В приложениях теории обыкновенных дифференциальных уравнений важную роль играет вопрос о влиянии на решение задачи Коши погрешности в начальных условиях.

Можно показать, что имеет место

Теорема. Пусть x – решение задачи Коши

$$x' = f(t,x); \qquad x(t_0) = x^{(0)} \tag{2.12.1}$$

– определено на сегменте $[t_0, T]$. Пусть функция f и ее частная производная $D_x f$ непрерывны при $t \in [t_0, T]$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда для любого положительного ε найдется такое положительное δ, что если $|\widetilde{x}^{(0)} - x^{(0)}| < \delta$, то $\widetilde{x}$ – решение задачи Коши

$$x' = f(t,x); \qquad x(t_0) = \widetilde{x}^{(0)} \tag{2.12.2}$$

– также определено на сегменте $[t_0, T]$, причем выполнено неравенство $|\widetilde{x}(t) - x(t)| < \varepsilon$, $t \in [t_0, T]$.

Иначе говоря, *малое изменение* начального условия приводит к *малому изменению* решения на сегменте. Говорят, что решение задачи Коши непрерывно зависит от начальных данных.

Замечание. Теорема о непрерывной зависимости решения от начальных данных верна и для систем уравнений. В этом случае в задачах (2.12.1)–(2.12.2) $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – вектор-функция, имеющая непрерывные частные производные по компонентам вектора x, а все модули следует заменить на нормы.

Очевидно, что при увеличении длины промежутка, на котором рассматривается решение задачи (2.12.1), для достижения той же допустимой погрешности решения ε придется, вообще говоря, требовать все большей точности начальных данных δ. Поэтому выделяют весьма важный класс решений, для которых оценка погрешности решения *не зависит от промежутка*.

Определение. Пусть вектор-функция f и матрица ее частных производных $D_x f$ непрерывны при $t \geq t_0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Решение x задачи Коши (2.12.1) называется *устойчивым по Ляпунову*[3], если выполнены три условия:

1) решение x определено при всех $t \geq t_0$;

2) существует такое число $\rho > 0$, что если $\|\widetilde{x}^{(0)} - x^{(0)}\| < \rho$, то решение $\widetilde{x}$ задачи Коши (2.12.2) также определено при всех $t \geq t_0$;

3) для любого положительного ε найдется такое положительное $\delta \leq \rho$, что если $\|\widetilde{x}^{(0)} - x^{(0)}\| < \delta$, то

$$\|\widetilde{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

Таким образом, устойчивость решения по Ляпунову означает, что малое изменение начальных данных приводит к малому изменению решения на *бесконечном* промежутке $[t_0, +\infty[$.

Если система дифференциальных уравнений описывает поведение динамической системы, а $x(t)$ – требуемый режим работы этой системы, то устойчивость по Ляпунову означает, что малые отклонения от этого режима в момент t_0 не приведут к "развалу" системы – система будет всегда находиться вблизи требуемого режима.

Важную роль в приложениях играет еще одно понятие.

Определение. Решение x называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову, и существует такое положительное число $\rho_1 \leq \rho$, что если $\|\widetilde{x}^{(0)} - x^{(0)}\| < \rho_1$, то

$$\|\widetilde{x}(t) - x(t)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

В применении к динамической системе асимптотическая устойчивость означает, что при малом отклонении от требуемого режима система стремится приблизиться к нему.

Рассмотрим некоторые условия асимптотической устойчивости. Начнем с задачи Коши для линейной системы с постоянными коэффициентами

$$x' = Ax + f; \qquad x(t_0) = x^{(0)}. \tag{2.12.3}$$

[3]Александр Михайлович ЛЯПУНОВ (1857-1918) – русский математик и механик, академик Петербургской АН, член многих академий и научных обществ. Создатель теории устойчивости движения, автор фундаментальных работ по теории дифференциальных уравнений, математической физике и теории вероятностей.

Теорема. Следующие два утверждения равносильны:

1) решение задачи Коши (2.12.3) асимптотически устойчиво;

2) все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части.

Доказательство. Пусть x – решение задачи Коши (2.12.3), а $\widetilde{x}$ – решение задачи Коши для той же системы с *другим* вектором начальных данных $\widetilde{x}^{(0)}$. Обозначим $z = \widetilde{x} - x$, $z_0 = \widetilde{x}^{(0)} - x^{(0)}$. Тогда по формуле (2.4.3) получаем

$$z(t) = exp\big(A(t-t_0)\big) \cdot z_0 = exp(-At_0) \cdot exp(At) \cdot z_0. \qquad (2.12.4)$$

Пусть матрица A имеет собственное число λ с неотрицательной вещественной частью. Тогда, если z_0 – соответствующий собственный вектор, то $z(t) = exp(\lambda(t-t_0)) \cdot z_0$, и $\|z(t)\| \geq \|z_0\|$ при $t \geq t_0$. Таким образом, при сколь угодно малом по норме векторе z_0 (отклонении начальных данных) отклонение решения z не стремится к нулю, т.е. решение x не является асимптотически устойчивым.

Пусть теперь все собственные числа λ_j матрицы A имеют отрицательные вещественные части. Из (2.12.4) видно, что

$$\|z(t)\| \leq \|exp(-At_0)\| \cdot \|exp(At)\| \cdot \|z_0\|. \qquad (2.12.5)$$

Из п.2.5 известно, что изображения элементов матричной экспоненты – правильные рациональные дроби, полюсы которых – собственные числа матрицы A. Разлагая их на простейшие и вспоминая формулу

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{(s-\lambda)^k}\Big) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \cdot exp(\lambda t) \cdot \delta_1(t),$$

получаем, что все элементы матричной экспоненты – линейные комбинации функций вида $t^k \cdot exp(\lambda_j t)$, где λ_j – собственные числа матрицы A, а $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Поскольку $Re(\lambda_j) < 0$, все функции такого вида ограничены на $[0, +\infty[$ и обращаются в нуль при $t = +\infty$. Поэтому

$$\|exp(At)\| \leq C \quad \text{при} \quad t \in [0, +\infty[; \qquad \lim_{t=+\infty} \|exp(At)\| = 0.$$

Таким образом, из (2.12.5) видно, что при $\|z_0\| < \delta$

$$\|z(t)\| \leq \|exp(-At_0)\| \cdot C \cdot \delta \quad \text{при} \quad t \in [t_0, +\infty[; \qquad \lim_{t=+\infty} \|z(t)\| = 0.$$

Из первого соотношения следует устойчивость решения x по Ляпунову; второе означает асимптотическую устойчивость. ■

Переходя к рассмотрению нелинейных систем, мы ограничимся лишь одной ситуацией. Пусть $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – непрерывно дифференцируемое векторное поле, и $F(x^{(0)}) = \theta_n$. Тогда система уравнений

$$x' = F(x) \tag{2.12.6}$$

имеет решение $x(t) \equiv x^{(0)}$.

Терминологическое замечание. Система уравнений вида (2.12.6) (у которой правая часть не зависит от t) называется *автономной*. Точки, в которых поле F обращается в нуль, именуются *точками покоя* системы.

Пусть $\widetilde{x}$ – решение задачи Коши для системы (2.12.6) с начальным условием $x(0) = \widetilde{x}^{(0)}$. Обозначим $z = \widetilde{x} - x^{(0)}$ уклонение решения от точки покоя и перепишем (2.12.6), используя формулу Тейлора для поля F:

$$z' = DF(x^{(0)}) \cdot z + \alpha(z) \tag{2.12.7}$$

(α – остаточный член формулы Тейлора).

Поскольку при z, малых по норме, остаточный член мал по сравнению с первым слагаемым в правой части (2.12.7), можно ожидать, что решения системы (2.12.6) *в малой окрестности точки покоя* $x^{(0)}$ ведут себя так же, как решения линейной системы.

Действительно, *можно показать, что* имеет место

Теорема Ляпунова. Если все собственные числа матрицы $DF(x^{(0)})$ имеют *отрицательные* вещественные части, то решение $x(t) \equiv x^{(0)}$ системы (2.12.6) асимптотически устойчиво. Если хотя бы одно собственное число матрицы $DF(x^{(0)})$ имеет *положительную* вещественную часть, то решение $x(t) \equiv x^{(0)}$ не будет устойчивым по Ляпунову (и тем более асимптотически устойчивым).

Замечание. Эта теорема называется теоремой об устойчивости по линейному приближению. Если для некоторых собственных чисел матрицы $DF(x^{(0)})$ $Re(\lambda_j) = 0$, а для остальных $Re(\lambda_j) < 0$, то эта теорема не дает ответа на вопрос об устойчивости точки покоя.

Пример. Рассмотрим движение маятника с трением в подшипнике (рис.2.2). Запишем второй закон Ньютона:

$$mR\varphi'' = f_{\text{тр}} + f_{\text{тяж}} \cdot sin(\varphi) = -\varkappa\varphi' - mg \cdot sin(\varphi). \tag{2.12.8}$$

Введя обозначения $x_1 = \varphi$, $x_2 = \varphi'$, сведем (2.12.8) к автономной системе уравнений вида (2.12.6) (здесь $\varepsilon = \varkappa/(mR)$, $\omega^2 = g/R$)

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\omega^2 sin(x_1) - \varepsilon x_2 \end{bmatrix}. \tag{2.12.9}$$

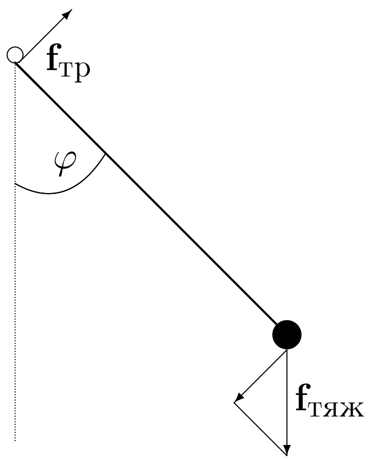

Рис.2.2

Точки покоя системы (2.12.9) определяются условиями $sin(x_1) = 0$, $x_2 = 0$, и соответствуют неподвижному маятнику в нижней ($x_1 = 2k\pi$, k целое) или в верхней ($x_1 = (2k+1)\pi$, k целое) точке окружности.

Если $x^{(0)} = [(2k+1)\pi,\ 0]^T$, то $A = DF(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\varepsilon \end{bmatrix}$, и

$$\lambda_1(A) = -\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2/4}, \qquad \lambda_2(A) = -\frac{\varepsilon}{2} - \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2/4}.$$

Очевидно, что $Re(\lambda_1) > 0$. Таким образом, никакое трение не может сделать верхнее положение маятника устойчивым.

Если $x^{(0)} = [2k\pi,\ 0]^T$, то $A = DF(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\varepsilon \end{bmatrix}$, и

$$\lambda_1(A) = -\frac{\varepsilon}{2} + i\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2/4}, \qquad \lambda_2(A) = -\frac{\varepsilon}{2} - i\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2/4}$$

(мы предполагаем, что трение мало, и $\varepsilon < 2\omega$).

Очевидно, оба собственных числа имеют отрицательные вещественные части. Таким образом, сколь угодно малое трение делает нижнее положение маятника асимптотически устойчивым.

Если трения нет ($\varepsilon = 0$), то в нижней точке собственные числа имеют нулевые вещественные части ($\lambda_{1,2} = \pm i\omega$), и теорема Ляпунова не дает ответа на вопрос об устойчивости. *Можно показать, что* в этом случае нижнее положение маятника устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически устойчиво.