Олимпиада “Математика и алгоритмы”

23 января 2011 года

Основная аудитория

1. На международной олимпиаде встретились юные математики Алан, Бела, Войцех и Глеб. Известно, что один из них всегда говорит правду, двое всегда лгут, а один строго чередует правду с ложью.

   Алан: Бела всегда лжёт. Я всегда говорю правду.

   Бела: Я всегда говорю правду. Войцех всегда лжёт.

   Войцех: Глеб всегда говорит правду. Я всегда говорю правду.

   Глеб: Алан сегодня солгал оба раза. Бела всегда лжёт.

   Определите кто из них кто.

2. В равнобедренном треугольнике ABC на основании AC взяли точку X. Прямые BM и BN — медианы соответственно треугольников ABX и XBC (M и N принадлежат отрезку AC). На них взяли точки D и E такие, что $|AD| = |CE|$. Оказалось, что также $|MD| = |NE|$ и $B\hat{A}D = B\hat{C}E$. Докажите, что BX — медиана треугольника ABC.

3. Пусть правило int от высказывания возвращает 1, если высказывание является правдой и 0, если высказывание является ложью. Например: $int(100500 \vdots 100) = 1$, $int(100500 \vdots 9) = 0$. Докажите, что для натуральных чисел a, b: остаток от деления a на b равен

$$\sum_{i=1}^{b}(int((a+i) \vdots b) \cdot (b-i)).$$

4. Автомату задано начальное значение переменной $a = 3$. После этого автомат 4 раза подряд выполнил следующий блок операций:

$$b = a + 1;\ c = a \cdot b;\ d = c - 4 \cdot a;\ a = d + b.$$

   Какое значение содержит теперь переменная a? Ответ объясните.

Олимпиада “Математика и алгоритмы”

23 января 2011 года

Выводная аудитория

5. Найдите минимальное по модулю решение уравнения

$$(x-2)\cdot|x+2| + (x-1)\cdot|x+1| + x\cdot|x| + (x+1)\cdot|x-1| + (x+2)\cdot|x-2| = -1.$$

6. У Буратино есть n карточек с числами от 1 до n по одной с каждым из чисел (число n неизвестно). Мальвина может назвать число k. Тогда Буратино возьмёт k верхних карточек, по одной перекладывая их в низ колоды, и, посчитав сумму чисел, написанных на перекладываемых карточках, сообщит ей полученное число. Как Мальвине определить число n, если каждое следующее называемое ей число должно быть больше предыдущего?

7. Найдите все пары натуральных чисел a и b такие, что a — простое, и $a^2 + 3 \cdot b = 5 \cdot b^2 + a$.

Олимпиада “Математика и алгоритмы”

23 января 2011 года

Основная аудитория

1. В Тридевятом царстве есть два острова. На одном острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, а на другом — лжецы, которые всегда лгут. Однажды встретились три островитянина A, B, C.

   A: C — лжец; я и B с одного острова.

   B: A — лжец; я и C с одного острова.

   C: Один из A и B — лжец; A и B с разных островов.

   Определите, кто из них кто.

2. В равнобедренном треугольнике ABC на основании AC взяли точку X. Прямые BM и BN — медианы соответственно треугольников ABX и XBC (M и N принадлежат отрезку AC). На них взяли точки D и E такие, что $|AD| = |CE|$. Оказалось, что также $|MD| = |NE|$ и $B\hat{A}D = B\hat{C}E$. Докажите, что BX — медиана треугольника ABC.

3. Пусть правило int от высказывания возвращает 1, если высказывание является правдой и 0, если высказывание является ложью. Например: $int(5 > 3) = 1$, $int(5 < 5) = 0$, $int(5 \geqslant 5) = 1$.

   Докажите равенство: $|a| = a \cdot (int(a > 0) - int(a < 0))$.

4. В ряд стоят 2011 вазочек. В них (по одному в каждой) лежат шарики с номерами от 1 до 2011, причём порядок расположения шариков нам не известен. Два робота стоят около крайних вазочек. Пока “левый” робот стоит у своей вазочки, “правый” проходит от правого конца до “левого” робота и обратно. В каждом положении роботы сравнивают номера шариков в их вазочках и, если правый шарик имеет меньший номер, меняют их местами. Когда “правый робот возвращается к крайней правой вазочке, “левый” робот переходит к следующей справа вазочке. Когда “левый” робот оказывается около крайней правой вазочки, роботы заканчивают свою работу. Каков будет порядок шариков после их действий? Почему Вы так считаете?

5. Автомату задано начальное значение переменной $a = 3$. После этого автомат 4 раза подряд выполнил следующий блок операций:

   $$b = a + 1;\ c = a \cdot b;\ d = c - 4 \cdot a;\ a = d + b.$$

   Какое значение содержит теперь переменная a? Ответ объясните.

Олимпиада “Математика и алгоритмы”

23 января 2011 года

Выводная аудитория

6. Найдите минимальное по модулю решение уравнения

   $$(x-2)\cdot|x+2| + (x-1)\cdot|x+1| + x\cdot|x| + (x+1)\cdot|x-1| + (x+2)\cdot|x-2| = -1.$$

7. У Буратино есть n карточек с числами от 1 до n по одной с каждым из чисел (число n неизвестно). Мальвина может назвать число k. Тогда Буратино возьмёт k верхних карточек, по одной перекладывая их в низ колоды, и, посчитав сумму чисел, написанных на перекладываемых карточках, сообщит ей полученное число. Как Мальвине определить число n, если каждое следующее называемое ей число должно быть больше предыдущего?

8. Найдите все пары натуральных чисел a и b такие, что a — простое, и $a^2 + 3 \cdot b = 5 \cdot b^2 + a$.